Příloha **251** článku [34. Oběh Stirlingova motoru](https://www.transformacni-technologie.cz/seznam-clanku.html#34), https://www.transformacni-technologie.cz/seznam-clanku.html#34.

Rovnice teploty pracovního plynu ve vyšetřovaných objemech

Pro oběh sestrojený podle zjednodušujících předpokladů uvedených v [43.435] a pro podmínku, že teplota pracovního plynu na teplé straně motoru bude stejná jako na teplé straně regenerátoru ($T_{RT}=T_T$), potom lze použít rovnici polytropy pro libovolný elementární hmotnost pracovního plynu na teplé straně motoru dm_T:

$$p\cdot(v_T)^n=p_1\cdot v_{T,1}^n \quad \text{[1, str. 95]} \qquad \text{(a)},$$

p [Pa] tlak pracovního plynu v motoru,
v_T [$m^3\cdot kg^{-1}$] měrný objem pracovního plynu na teplé straně motoru,
n [-] exponent polytropy,
index *1* označuje libovolný bod oběhu, ve kterém je znám tlak a měrný objem.

Stavové veličiny ideálního plynu lze vypočítat ze stavové rovnice ideálního plynu [1, str. 66], ze které vyplývá:

$$v_T=\frac{r\cdot T_T}{p} \qquad \text{(b)},$$

T_T [K] absolutní teplota pracovního plynu ve vyšetřovaném objemu,
r [$kg\cdot J^{-1}\cdot K^{-1}$] individuální plynová konstanta pracovního plynu.

Dosazením rovnice *(b)* do *(a)* a úpravou lze stanovit teplotu pracovního plynu na teplé straně, pro kterýkoliv bod oběhu:

$$p\left(\frac{T_T}{p}\right)^n=p_1\left(\frac{T_{T,1}}{p_1}\right)^n \Rightarrow T_T=\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1-n}{n}} T_{T,1} \qquad \text{(c)}.$$

Z rovnice je patrné, že maximální teploty dosáhne pracovní plyn při p_{max} a minimální při p_{min}.

Pro výpočet teploty pracovního plynu ve vyšetřovaném objemu je nutné znát teplotu pracovního plynu v tomto oběhu alespoň pro jeden bod oběhu. Protože je obvykle velmi dobře znám stav při p_{max} respektive p_{min}, je vhodné určit právě teplotu $T_{T,max}$ nebo $T_{T,min}$ z věty o střední hodnotě funkce například pro $T_{T,max}$. Například je-li známa funkce $p=f(\varphi)$ kde φ *[deg]* je pootočení hřídele bude rovnice pro výpočet střední teploty pracovního plynu na teplé straně motoru:

$$T_{T,st}=\frac{1}{360}\int_0^{360}\left(\frac{p_{max}}{p}\right)^{\frac{1-n}{n}} T_{T,max}\,d\varphi=$$

$$=\frac{T_{T,max}\cdot p_{max}^{\frac{1-n}{n}}}{360}\int_0^{360} p^{\frac{n-1}{n}}\,d\varphi \qquad \text{(d)},$$

$T_{T,st}$ [K] střední teplota pracovního plynu na teplé straně motoru,
φ [deg] pootočení hřídele.

Nebo pro případ *φ [rad]*:

$$T_{T,st}=\frac{T_{T,max}\cdot p_{max}^{\frac{1-n}{n}}}{2\pi}\int_0^{2\pi} p^{\frac{n-1}{n}}\,d\varphi\cdot$$

Rovnice *(d)* se řeší iteračním postupem tj. prvním kroku se odhadne maximální teplota $T_{T,\,max}$ a vypočítá teplota $T_{T,st}$, pokud se odlišuje od zadané střední teploty $T_{T,st}$ musí se odhad $T_{T,\,max}$ korigovat a výpočet se provede znovu.

Stejným postupem lze stanovit rovnici *(d)* i pro jiné funkce než $p=f(\varphi)$.

Výsledný doporučený tvar rovnice pro teplotu pracovního plynu na teplé straně:

$$T_T=\left(\frac{p_{max}}{p}\right)^{\frac{1-n}{n}} T_{T,max} \qquad \text{(e)}.$$

Aplikací poznatků při odvození rovnice *(e)* je možné odvodit podobné rovnice pro výpočet teploty na studené straně a v regenerátoru. Protože v celém objemu motoru je stejný exponent polytropy bude teplotní poměr mezi jednotlivými teplotami konstantní [43.437] a proto změny teploty pracovního plynu na teplé straně motoru budou kopírovat změny teploty pracovního plynu i v ostatních objemech:

$$T_S=\frac{T_T}{\tau},$$

$$\tau=\frac{T_T}{T_S}=\text{konst.}$$

$$T_R=\frac{T_T}{\tau_R},$$

$$\tau_R=\frac{T_T}{T_R}=\text{konst.}$$

Odkazy

1. KALČÍK, Josef, SÝKORA, Karel. *Technická termomechanika*, 1973. 1. vydání, Praha: Academia.

Příloha **436** článku [34. Oběh Stirlingova motoru](https://www.transformacni-technologie.cz/seznam-clanku.html#34), https://www.transformacni-technologie.cz/seznam-clanku.html#34 .

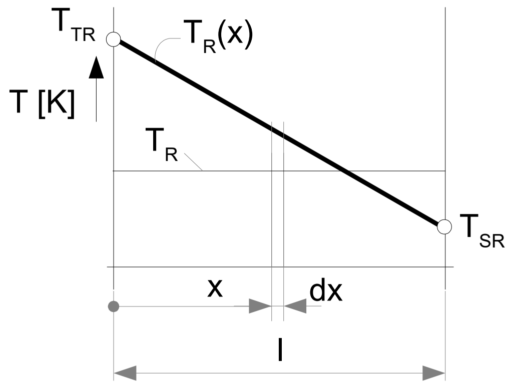
Střední teplota pracovního plynu v regenerátoru Stirlingova motoru

Střední teplotu pracovního plynu v regenerátoru lze odvodit z hmotnostní bilance a stavové rovnice ideálního plynu:

$$T_R=\frac{p\cdot V_R}{r\cdot m_R} \quad [43.955] \qquad \text{(a)}$$

T_R [K] střední teplota pracovního plynu v regenerátoru,
p [Pa] tlak v motoru,
V_R [kg] objem regenerátoru vyplněný pracovním plynem,
m_R [kg] hmotnost pracovního plynu v regenerátoru,
r [kg·J^-1^·K^-1^] individuální plynová konstanta.

Předpokladem pro stanovení hmotnosti pracovního plynu v regenerátoru m_R je lineární průběh teploty v regenerátoru:



Detail průběhu teploty pracovního plynu v regenerátoru.
l [m] délka regenerátoru.

Pro hmotnost pracovního plynu v regenerátoru:

$$m_R=\int_0^l dm=\int_0^l \rho\, dV=A_R\int_0^l \rho\, dx=$$

$$=\frac{p\cdot A_R}{r}\int_0^l \frac{1}{T_R(x)}dx,$$

ρ [kg·m^-3^] hustota pracovního plynu,
A_R [m^2^] průtočný průřez regenerátoru (kolmý na souřadnici *x*, po délce regenerátoru konstantní),

Teplota v jakémkoliv místě regenerátoru:
$T_R(x)=a\cdot x+b$,
Konstanty přímky se určí z okrajových podmínek:
$T_{TR}=a\cdot 0+b=b$,
$T_{SR}=a\cdot l+b=a\cdot l+T_{TR}$

$$a=\frac{T_{SR}-T_{TR}}{l},$$

$$T_R(x)=\frac{T_{SR}-T_{TR}}{l}\cdot x+T_{TR}.$$

$$m_R=\frac{p\cdot A_R\cdot l}{r}\int_0^l \frac{1}{(T_{SR}-T_{TR})x+T_{TR}\cdot l}dx=$$

$$=\frac{p\cdot V_R}{r}\cdot\frac{1}{T_{SR}-T_{TR}}\left[\ln\left|(T_{SR}-T_{TR})x+T_{TR}\cdot l\right|\right]_0^l=$$

$$=\frac{p\cdot V_R}{r(T_{SR}-T_{TR})}\ln\frac{T_{SR}}{T_{TR}} \quad \text{(b).}$$

Rovnice (b) upravená na tvar stavové rovnice:

$$p\cdot V_R=m_R\cdot r\cdot\frac{T_{SR}-T_{TR}}{\ln\left(\frac{T_{SR}}{T_{TR}}\right)}=m_R\cdot r\cdot T_R.$$

Odtud střední teplota pracovního plynu v regenerátoru:

$$T_R=\frac{T_{SR}-T_{TR}}{\ln\left(\frac{T_{SR}}{T_{TR}}\right)}.$$

Příloha **437** článku [34. Oběh Stirlingova motoru](https://www.transformacni-technologie.cz/seznam-clanku.html#34), https://www.transformacni-technologie.cz/seznam-clanku.html#34.

Rovnice tlaku pracovního plynu ve Stirlingově motoru

Sestrojení diferenciální rovnice popisující změny jednotlivých veličin za nekonečně malé změny objemu vychází z hmotnostní bilance pracovního plynu v motoru. Při sestavování popisných rovnic je uvažováno jednorozměrné proudění ideálního plynu:

Hmotnost pracovního plynu v pracovním objemu motoru je konstantní a rovná se součtu hmotností v dílčích pracovních objemech motoru:

$$m=m_T+m_R+m_S$$

m [kg] celková hmotnost pracovního plynu v pracovním objemu motoru,
m_T [kg] hmotnost pracovního plynu na teplé straně motoru,
m_R [kg] hmotnost pracovního plynu v regenerátoru,
m_S [kg] hmotnost pracovního plynu na studené straně motoru.

Protože hmotnost pracovního plynu v motoru je stálá bude přírůstek hmotnosti roven nule:

$$dm=\frac{\partial m}{\partial m_T}dm_T+\frac{\partial m}{\partial m_R}dm_R+\frac{\partial m}{\partial m_S}dm_S=0$$ [42. 377]

$\frac{\partial m}{\partial m_T}=1$, $\frac{\partial m}{\partial m_R}=1$, $\frac{\partial m}{\partial m_S}=1$, takže lze psát:

$$dm_R=-dm_T-dm_S \quad \text{(a).}$$

Hmotnost pracovního plynu dm_i, který vstoupil či vystoupil z dílčího pracovního objemu, odpovídá objemu dV_i podle stavové rovnice. Tento objem je výsledkem objemové změny dílčího pracovního objemu způsobené pohybem pístu a objemové změny pracovního plynu způsobené změnou jeho stavových veličin.

Objem pracovního plynu vystupující z teplé strany motoru nebo do ní vstupující dV_T (na hranici s regenerátorem) je roven:

$$dV_T=dV_T^{pp}-dV_{TV} \quad \text{(b),}$$

dV_T [m³] objem pracovního plynu vystupující či vstupující z teplé strany motoru do regenerátoru,
dV_{TV} [m³] změna objemu válce na teplé straně,
dV^{pp}_T [m³] změna objemu pracovního plynu na teplé straně vlivem změny jeho stavových veličin.

Kladná hodnota objemu dV_T znamená, že se jedná o objem pracovního plynu, který z teplé strany motoru vstupuje do regenerátoru.

Stejně tak pro objem pracovního plynu vystupující ze studené strany motoru nebo do ní vstupující dV_S platí:

$$dV_S=dV_S^{pp}-dV_{SV} \quad \text{(c)}$$

dV_S [m³] objem pracovního plynu vystupující či vstupující ze studené strany motoru do regenerátoru,

dV_{SV} [m³] změna objemu válce na studené straně,
dV^{pp}_{S} [m³] změna objemu pracovního plynu na studené straně vlivem změny jeho stavových veličin.

Objem pracovního plynu vystupující z regenerátoru nebo do něj vstupující dV_R odpovídá pouze změně objemu pracovního plynu vlivem změny jeho stavových veličin, protože absolutní objem mrtvého objemu je konstantní: $dV_R = dV_R^{pp}$.

Jednotlivé elementární hmotnosti z rovnice *(a)* lze tedy vyjádřit za pomocí stavové rovnice a rovnic *(b)*, *(c)*:

$$-dm_R = \frac{p}{r \cdot T_R} dV_R^{pp} ,$$

$r \; [J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}]$ individuální plynová konstanta,

$$-dm_T = \frac{p}{r \cdot T_{TR}} dV_T = \frac{p}{r \cdot T_{TR}} (dV_T^{pp} - dV_{TV}) ,$$

$$-dm_S = \frac{p}{r \cdot T_{SR}} dV_S = \frac{p}{r \cdot T_{SR}} (dV_S^{pp} - dV_{SV}) .$$

Dosazením těchto rovnic do rovnice *(a)* a úpravou:

$$\frac{T_{TR}}{T_R} dV_R^{pp} = dV_{TV} - dV_T^{pp} + \frac{T_{TR}}{T_{SR}} (dV_{SV} - dV_S^{pp})$$
(d).

Jednotlivé objemové změny pracovního plynu závisí na exponentu polytropy ve vyšetřovaném objemu.

V motoru probíhají polytropické změny, takže objem pracovního plynu na teplé straně lze popsat rovnicí polytropy:

$$p \cdot (V_T^{pp})^n = konst. = K$$

Diferenciální tvar této rovnice opět získáme z poznatku, že pravá strana rovnice je konstantní, takže její přírůstek bude roven nule:

$$dK = \frac{\partial K}{\partial dp} dp + \frac{\partial K}{\partial V_T^{pp}} dV_T^{pp} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial dp} = (V_T^{pp})^n , \; \frac{\partial K}{\partial dV_T^{pp}} = p \cdot n \cdot (V_T^{pp})^{n-1}$$

$$(V_T^{pp})^n dp + p \cdot n \cdot (V_T^{pp})^{n-1} dV_T^{pp} = 0$$

$$dV_T^{pp} = -\frac{V_T^{pp}}{p \cdot n} dp ,$$

$V_T^{pp} = V_T$, (pracovní plyn zaplňuje celý objem teplé strany)

$$dV_T^{pp} = -\frac{V_T}{p \cdot n} dp$$

n [-] střední exponent polytropy v pracovním objemu motoru.

Stejným způsobem lze odvodit změny objemu pracovního plynu dV^{PP}_S a dV^{PP}_R. Dosazením těchto změn do rovnice *(d)*:

$$-\frac{T_{TR}}{T_R} \frac{V_R}{p \cdot n} dp = dV_{TV} + \frac{V_T}{p \cdot n} dp + \frac{T_{TR}}{T_{SR}} \left(dV_{SV} + \frac{V_S}{p \cdot n} dp \right) \qquad \text{(e).}$$

Z [34.435(2)] plyne (podmínka zajišťuje platnost rovnice *(e)* pro oba směry proudění plynu z/do válce):

$$\tau = \frac{T_{TR}}{T_{SR}} = konst. *$$

Jestliže změna objemu pracovního plynu odpovídá polytropické změně se středním exponentem polytropy platí pro teplotní poměr mezi teplotou na hranici regenerátoru a střední teplotou v regenerátoru:

$$\tau_R = \frac{T_{TR}}{T_R} = konst. *$$

**Poznámka*
Pokud by byl exponent polytropy v celém objemu stejný (roven střednímu) bude teplotní poměr mezi dvěma jakýmikoliv elementárními objemy pracovním plynu konstantní (zůstává zachován teplotní profil) a předpoklad *(2)* z [34.435] není nutný.

Označením teplotních poměrů symbolem

τ respektive τ_R a následnou úpravou se zápis rovnice *(e)* zjednoduší na:

$$-\tau_R \frac{V_R}{p \cdot n} dp = dV_{TV} + \frac{V_T}{p \cdot n} dp + \tau \left(dV_{SV} + \frac{V_S}{p \cdot n} dp \right)$$
(f).

Mrtvé objemy na teplé a studené straně zahrnují i objem válců:
$V_T = V_{TM} + V_{TV}$,
$V_S = V_{SM} + V_{SV}$.

Dosazením do rovnice *(f)* a separací proměnných:

$$\frac{1}{n} \frac{dp}{p} = \frac{-dV_{TV} - \tau \cdot dV_{SV}}{V_{TV} + \tau \cdot V_{SV} + V_{TM} + \tau \cdot V_{SM} + \tau_R \cdot V_R} .$$

Integrací poslední rovnice:

$$\frac{1}{n} \ln p = -\ln \left(V_{TV} + \tau \cdot V_{SV} + V_{TM} + \tau \cdot V_{SM} + \tau_R \cdot V_R \right) + $$
$$+ C_{int} ,$$

separací tlaku na levou stranu rovnice:

$$p = \frac{C_{int}}{\left(V_{TV} + \tau \cdot V_{SV} + V_{TM} + \tau \cdot V_{SM} + \tau_R \cdot V_R \right)^n} ,$$

$C_{int} = e^{c_{int}}$, integrační konstanta.

Příloha **442** článku 34. Oběh Stirlingova motoru, https://www.transformacni-technologie.cz/seznam-clanku.html#34.

Rovnice pro minimální a maximální velikost redukovaného objemu Stirlingova motoru

$\frac{dV_{red}}{d\varphi}$:

$V_{red} = V_{TV} + \tau \cdot V_{SV} + V_{TM} + \tau \cdot V_{SM} + \tau_R \cdot V_R$,
[34.437].

$$V_{TV} = S_T \left[l + r - \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2(\varphi)} - r \cdot \cos(\varphi) \right] ,$$
[34.440].

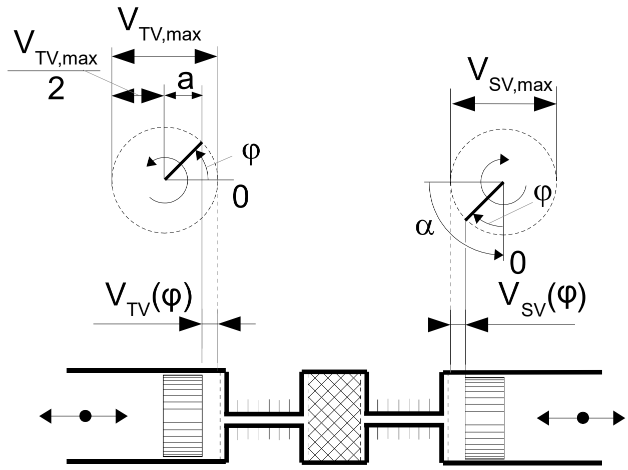
$$V_{SV} = S_T \left[l + r - \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2(\varphi - \alpha)} - \right.$$
$$\left. - r \cdot \cos(\varphi - \alpha) \right] ,$$ [34.440].

$$\frac{dV_{red}}{d\varphi} = \frac{dV_{TV}}{d\varphi} + \tau \frac{dV_{SV}}{d\varphi} ,$$

$$\frac{dV_{TV}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \left[l^2 - r^2 \cdot \sin^2(\varphi) \right]^{-\frac{1}{2}} (-2) r^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot$$
$$\cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi) ,$$

$$\frac{dV_{SV}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \left[l^2 - r^2 \cdot \sin^2(\varphi - \alpha) \right]^{-\frac{1}{2}} (-2) r^2 \cdot$$
$$\cdot \sin(\varphi - \alpha) \cdot \cos(\varphi - \alpha) + r \cdot \sin(\varphi - \alpha) .$$

Přibližná hodnota pootočení hřídele pro $V_{red,min}$ respektive $V_{red,max}$ se stanoví pro předpoklad nekonečně dlouhé ojnice:



Výpočet změny objemu válce pro případ nekonečně dlouhé ojnice.

Objem válce na teplé straně

$$V_{TV} = V_{TV,max} - \left(\frac{V_{TV,max}}{2} + a \right) ,$$

$V_{TV,max} = S_T \cdot 2 \cdot r$ [34.439]

$$\cos\varphi = \frac{a}{\frac{V_{TV,max}}{2}} \Rightarrow a = \frac{V_{TV,max}}{2} \cos\varphi ,$$

$$V_{TV} = V_{TV,max} - \left(\frac{V_{TV,max}}{2} + \frac{V_{TV,max}}{2} \cos\varphi \right) =$$
$$= \frac{1}{2} V_{TV,max} (1 - \cos\varphi) .$$

Stejný postup lze aplikovat i pro výpočet objemu válce na studené straně s tím, že pohyb pístu na studené straně opožděn o úhel α. To znamená, že místo proměnné φ bude vystupovat φ-α:

$$V_{SV}=V_{SV,max}-\left(\frac{V_{SV,max}}{2}+\frac{V_{SV,max}}{2}\cos(\varphi-\alpha)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}V_{SV,max}(1-\cos(\varphi-\alpha)).$$

$V_{SV,max}=S_S\cdot 2\cdot r$, [34.439]

Poměr mezi maximální objemem válce na studené a teplé straně:

$$\frac{V_{SV,max}}{V_{TV,max}}=\frac{S_S}{S_T}=k_1$$

$$V_{SV}=\frac{1}{2}V_{TV,max}\frac{S_S}{S_T}[1-\cos(\varphi-\alpha)].$$

Redukovaný objem:

$$V_{red}=\frac{1}{2}V_{TV,max}(1-\cos\varphi)+$$
$$+\tau\frac{1}{2}V_{TV,max}\frac{S_S}{S_T}[1-\cos(\varphi-\alpha)]+V_{M,red}$$

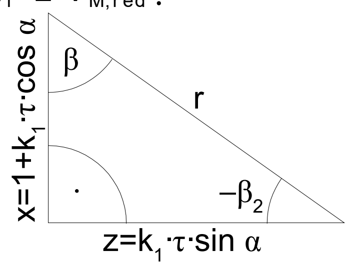
$V_{M,red}=V_{TM}+\tau\cdot V_{SM}+\tau_R\cdot V_R$, pro zjednodušení zápisu

$$V_{red}=\frac{V_{TV,max}}{2}\big(1-\cos\varphi+\tau\cdot k_1-$$
$$-\tau\cdot k_1\cos(\varphi-\alpha)+2\cdot k_2\cdot V_{M,red}\big),$$

$$k_2=\frac{V_{M,red}}{V_{TV,max}},$$

$$V_{red}=\frac{V_{TV,max}}{2}\big(1+\tau\cdot k_1+2\cdot k_2\cdot V_{M,red}-\cos\varphi-$$
$$-\tau\cdot k_1\cos\varphi\cdot\cos\alpha-\tau\cdot k_1\sin\varphi\cdot\sin\alpha\big)=$$
$$=\frac{1}{2}V_{TVmax}\Big(A-\big[(1+\tau\cdot k_1\cos\alpha)\cos\varphi+$$
$$+\tau\cdot k_1\sin\varphi\cdot\sin\alpha\big]\Big)\ \text{(a)},$$

$$A=1+\tau\cdot k_1+2\cdot V_{M,red}.$$



Přičemž pro pravoúhlý trojúhelník platí:

$$x=r\cdot\cos\beta,\quad z=r\cdot\sin\beta,\quad \tan\beta=\frac{z}{x},$$

$$r^2=x^2+z^2,$$

$$\sqrt{r^2}\cos(\varphi-\beta)=x\cdot\cos\varphi+z\cdot\sin\varphi,$$

$$x=1+k_1\cdot\tau\cdot\cos\alpha,\quad z=k_1\cdot\tau\cdot\sin\alpha,$$

$$\beta=\arctan\left(\frac{z}{x}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{k_1\cdot\tau\cdot\sin\alpha}{1+k_1\cdot\tau\cdot\cos\alpha}\right).$$

Odtud rovnici úprava rovnice *(a)*:

$$V_{red}=\frac{1}{2}V_{TVmax}(A+B\cdot\cos(\varphi-\beta))\ \text{(b)},$$

$$B=-\sqrt{x^2+z^2},$$
$$x=1+\tau\cdot k_1\cos\alpha,$$
$$z=\tau\cdot k_1\cdot\sin\alpha,$$
$$\beta=\arctan\left(\frac{z}{x}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{\tau\cdot k_1\cdot\sin\alpha}{1+\tau\cdot k_1\cos\alpha}\right).$$

Extrémy V_{red}:

$$V_{red,min}=\frac{1}{2}V_{TVmax}(A+B):$$

$$\varphi_{min}=\beta=\mathrm{arctg}\left(\frac{\tau\frac{S_S}{S_T}\cdot\sin\alpha}{1+\tau\frac{S_S}{S_T}\cos\alpha}\right),$$

$$V_{red,max}=\frac{1}{2}V_{TVmax}(A-B):$$

$$\varphi_{max}=\beta+\pi=\mathrm{arctg}\left(\frac{\tau\frac{S_S}{S_T}\cdot\sin\alpha}{1+\tau\frac{S_S}{S_T}\cos\alpha}\right)+\pi.$$

Příloha **447** článku 34. Oběh Stirlingova motoru, https://www.transformacni-technologie.cz/seznam-clanku.html#34.

Důkaz, že pro n=1 platí $C_{int}=r\cdot m\cdot T_T$

$$m=m_{TV}+m_{TM}+m_R+m_{SM}+m_{SV},$$

m [kg] hmotnost pracovního plynu v celém pracovním objemu.

Přičemž v celém objemu teplé strany je teplota T_T a studené teplota T_S.

Ze stavové rovnice pro každý objem platí:

$$m=\frac{p\cdot V_{TV}}{r\cdot T_{TR}}+\frac{p\cdot V_{TM}}{r\cdot T_{TR}}+\frac{p\cdot V_{R}}{r\cdot T_{R}}+\frac{p\cdot V_{SM}}{r\cdot T_{SR}}+\frac{p\cdot V_{SV}}{r\cdot T_{SR}}\ ,$$

Separací tlaku *p*:

$$p=\frac{r\cdot T_T\cdot m}{V_{TV}+\tau\cdot V_{SV}+V_{TM}+\tau\cdot V_{SM}+\tau_R\cdot V_M}\ ,$$

$$\tau=\frac{T_{TR}}{T_{SR}},$$

$$\tau_R=\frac{T_{TR}}{T_R}.$$