409 Odvození vzorců charakteristických tlouštěk mezní vrstvy pro případ proudění kanále

Odst. 1 Příloha obsahuje odvození rovnic pro výpočet těchto charakteristických tlouštěk měznί vrstvy: **1.** Pošinovací tloušťka mezní vrstvy; **2.** Impulsní tloušťka mezní vrstvy; **3.** Energetická tloušťku mezní vrstvy. Odvození je také provedeno v [20, s. 71].

Odst. 2 **1/3.** V důsledku existence mezní vrstvy při proudění se třením je hmotnostní průtok menší o tuto diferenci:

$$c_{max} \cdot \rho \cdot A^* = \Delta \dot{m},$$

Δm [kg·s^{-1}] rozdíl mezi hmotnostním průtokem při vnitřní tření a bez vnitřního tření.

Odst. 3 Diference hmotnostního průtoku je současně rovna rozdílu hmotnostního průtoku tekutiny bez vnitřního tření průtočným průřezem *A* a skutečného hmotnostního průtoku:

$$\Delta \dot{m} = c_{max} \cdot \rho \cdot A - \dot{m}.$$

$$c_{max} \cdot \rho \cdot A^* = c_{max} \cdot \rho \cdot A - \dot{m} \Rightarrow A^* = A - \frac{\dot{m}}{c_{max} \cdot \rho}.$$

Odst. 4 **2/3.** Impulsní mezní vrstva zmenšuje hybnost tekutiny oproti hybnosti při proudění bez tření o tuto hodnotu:

$$\Delta H = c_{max} \cdot \dot{m}^{**} = c_{max}^2 \cdot \rho \cdot A^{**},$$

m** [kg·s^{-1}] hmotnostní průtok impulsní tloušťkou mezní vrstvy rychlostí c_{max}.

Odst. 5 Ztrátu hybnosti v důsledku vnitřního tření vyjádříme i jako rozdíl hybnosti tekutiny proudící rychlostí c_{max} průtočným průřezem a skutečnou hybností proudu:

$$\Delta H = c_{max} \cdot c_{max} \cdot A \cdot \rho - H,$$

ΔH [N] rozdíl mezi hybností tekutiny při vnitřním tření a bez vnitřního tření při stejném hmotnostním průtoku.

$$c_{max}^2 \cdot \rho \cdot A^{**} = c_{max} \cdot c_{max} \cdot A \cdot \rho - H \Rightarrow c_{max}^2 \cdot \rho \cdot A^{**} = A - \frac{H}{c_{max}^2 \cdot \rho}.$$

Odst. 6 **3/3.** Energetická mezní vrstva zmenšuje kinetický výkon proudu tekutiny oproti kinetickému výkonu při proudění bez tření o tuto hodnotu:

$$\Delta E_k = \frac{c_{max}^2}{2} \cdot \dot{m}^{***} = \frac{c_{max}^3}{2} \cdot \rho \cdot A^{***},$$

ΔE$_k$ [W] rozdíl kinetického výkonu při vnitřním tření a bez vnitřního tření při stejném průtoku; **m***** [kg·s^{-1}] hmotnostní průtok energetickou tloušťkou mezní vrstvy rychlostí c_{max}.

Odst. 7 Ztrátu kinetického výkonu proudu v důsledku vnitřního tření vyjádříme i jako rozdíl kinetického výkonu tekutiny proudící rychlostí c_{max} průtočným průřezem a skutečným kinetickým výkonem proudu:

$$\Delta E_k = \frac{c_{max}^2}{2} c_{max} \cdot A \cdot \rho - E_k .$$

$$\frac{c_{max}^3}{2} \cdot \rho \cdot A^{***} = \frac{c_{max}^3}{2} \cdot A \cdot \rho - E_k \Rightarrow A^{***} = A - \frac{E_k}{\frac{c_{max}^3}{2} \cdot \rho} .$$

413 Řešení úlohy

Zvolené parametry

c_{max}	t	h	ρ
4,5	1	1	1

c [m·s^{-1}], **t** [m], **h** [m] šířka kanálu (repsektive budem počítat parametry na *1 m* šířky kanálu), **ρ** [kg·m^{-3}]

Charakteristické tloušťky mezní vrstvy vypočítáme z jejich průtočných průřezů *A*, které jsou definovány *Vzorci 409, s. 6*. Jednotlivé tloušťky označíme symbolem *δ*.

Ve *Vzorcích 409, s. 6* vystupují údaje o průtoku, hybnosti a kinetické výkonu proudu, které lze vypočítat podle *Vzorců 173, 3*, proto rozdělíme řešení úlohy na tyto dvě části: **1.** Výpočet průtoku, hybnosti a kinetického výkonu proudu; **2.** Výpočet průtočných ploch pro jednotlivé charakteristické tloušťky mezní vrstvy a z těch výpočet jejich tlouštěk.

m

1/2. Začněme výpočtem očekávaného průtoku mezi dvěma deskami na metr šířky tohoto kanálu. Hmotnostní průtok vypočítáme ze střední rychlosti proudění podle *Vzorce 173c, s. 3*:

$$\bar{c} = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A} \Rightarrow \dot{m} = \bar{c} \cdot \rho \cdot A .$$

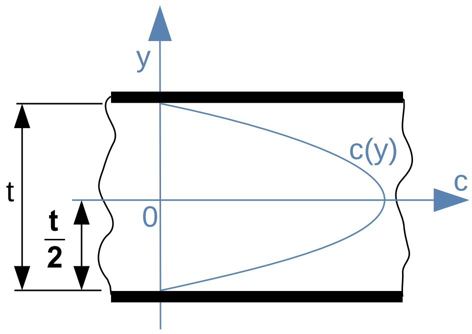
$\bar{c}$

Střední rychlost proudění lze vypočítat z průběhu rychlosti podle obecného integrálu uvedeného v *Příloze 173, s. 3*:

$$\bar{c} = \frac{1}{A} \int_A c \, dA .$$

c

O funkci rychlosti *c=f(x)* víme, že má parabolický průběh, takže rovnici pro takový průběh odvodíme snadno z tohoto obrázku:



Rovnice paraboly v uvedeném sytému souřadnic bude mít tvar:

$$c=c_{max}-a\cdot y^2.$$

Konstantu *a* vyjádříme z nějakého bodu na parabole, na příkladu stěny, kde je rychlost nulová bude platit:

$$0=c_{max}-a\left(\frac{t}{2}\right)^2\Rightarrow a=\frac{4c_{max}}{t^2}.$$

$$c=c_{max}-\frac{4\cdot c_{max}}{t^2}y^2.$$

Střední rychlost tedy můžeme vypočítat z integrálu:

$$\bar{c}=\frac{1}{A}\int_A\left(c_{max}-\frac{4\cdot c_{max}}{t^2}y^2\right)dA.$$

A

Jednotková průtočná plocha je rovna součiny vzdálenosti desek od sebe a *1*:

$$A=t\cdot 1\Rightarrow dA=dy\cdot 1.$$

A
1

[m^2]

$$\bar{c}=\frac{1}{t}\int_A\left(c_{max}-\frac{4\cdot c_{max}}{t^2}y^2\right)dy=\frac{1}{t}\int_{-t/2}^{t/2}\left(c_{max}-\frac{4\cdot c_{max}}{t^2}y^2\right)dy.$$

Protože rychlostní profil je symetrický lze psát:

$$\bar{c}=\frac{2}{t}\int_0^{t/2}\left(c_{max}-\frac{4\cdot c_{max}}{t^2}y^2\right)dy=\frac{2c_{max}}{t}\left[y-\frac{4}{3t^2}y^3\right]_0^{t/2}=\frac{2c_{max}}{t}\left(\frac{t}{2}-\frac{4}{3\cdot 8t^2}t^3\right)=$$
$$=2c_{max}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}c_{max}.$$

c$^-$	m
3	3

c [m·s^{-1}], **m** [kg·s^{-1}]