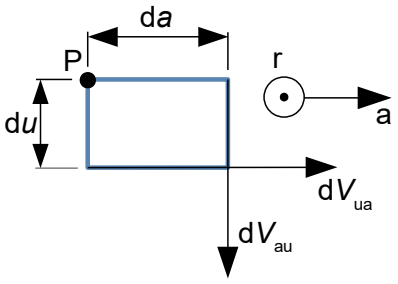
PŘÍLOHA 421: Technické nauky, Technická matematika, Odvození rovnice pro rotor vektoru ve válcové soustavě souřadnic

Hledáme rotaci vektoru rychlosti $\vec{V}(V_r; V_\theta; V_a)$. Tedy hledáme velikost úhlové rychlosti v jednotlivých směrech elementu otáčející se kolem bodu P. Úhlová rychlost vektoru $\vec{V}$ v blízkosti bodu P kolem osy rovnoběžné se směrem osy r stanovíme z přírůstků složek vektoru ve směru a a obvodovém směru u:



Podle popisu uvedeného u OBRÁZKU 1031 (s. 51) lze pro úhlovou rychlost ve směru osy-r psát:

$$\omega_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}V_{ua}}{\mathrm{d}u} - \frac{\mathrm{d}V_{au}}{\mathrm{d}a}\right).$$

Diferenciál obvodové vzdálenosti podle pravidel pro parciální derivace ve válcové soustavě souřadnic (VZOREC 679, s. 42):

$$\mathrm{d}u = r \cdot \mathrm{d}\theta.$$

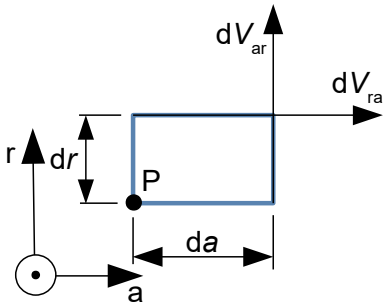
Takže rovnici pro úhlovou rychlost kolem osy-r lze psát:

$$\omega_r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V_{ua}}{\mathrm{d}\theta} - \frac{\mathrm{d}V_{au}}{\mathrm{d}a}\right).$$

Jednotlivé přírůstky složek rychlosti lze zapsat pomocí symboliky pro parciální derivace (viz OBRÁZEK 269, s. 39):

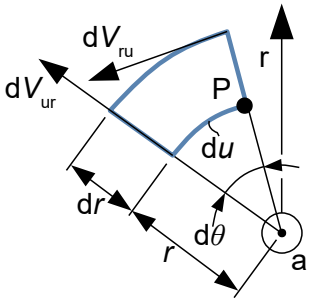
$$\omega_r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_a}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial a}\right).$$

P421/2: Stejně lze postupovat při stanovení úhlové rychlosti vektoru $\vec{V}$ v blízkosti bodu P kolem obvodového směru definovaného tečnou oblouku $r \cdot \theta$:



$$\omega_u = \frac{1}{2}\left(\frac{dV_{ar}}{da} - \frac{dV_{ra}}{dr}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_r}{\partial a} - \frac{\partial V_a}{\partial r}\right).$$

P421/3: Úhlová rychlost vektoru $\vec{V}$ v blízkosti bodu P kolem osy rovnoběžné se směrem osy a stanovíme z přírůstků složek vektoru ve směru *r* a obvodovém směru *u*:



V tomto případě je popis nejsložitější. Nutno si nejprve uvědomit, že má-li látka v bodě P obvodovou rychlost V_θ, pak má i úhlovou rychlost Ω kolem osy a:

$$\Omega = \frac{V_\theta}{r}.$$

To znamená, že nemá-li látka kolem bodu *P* rotovat, ale pouze se posouvat musí rameno d*r* z bodu *P* mít přesně opačnou úhlovou rychlost -Ω:

$$-\Omega = \frac{(dV_{ru})}{dr}.$$

Diferenciál (dV_{ru}) se vyjádříme z rovnosti posledních dvou rovnic:

$$\frac{V_\theta}{r} = -\frac{(dV_{ru})}{dr},$$
$$(dV_{ru}) = -\frac{V_\theta \cdot dr}{r}.$$

Diferenciál (dV_{ru}) označuje záporný přírůstek obvodové složky rychlosti, který je nutný, aby látka nerotovala kolem bodu P od změny obvodové složky v radiálním směru. To znamená, že úhlová rychlost rotace kolem bodu P od změn obvodové složky bude rovna rozdílu celkového přírůstku obvodové rychlosti v radiálním směru dV_{ru} a (dV_{ru}) (takže jestliže přírůstek obvodové rychlosti v radiálním směru bude nulový bude látka v nejbližším okolí bodu P rotovat úhlovou rychlostí Ω):

$$\omega_{a1} = \frac{dV_{ru} - (dV_{ru})}{dr}.$$

Kombinací posledních dvou rovnic získáme:

$$\omega_{a1} = \frac{r \cdot dV_{ru} + V_\theta \cdot dr}{r \cdot dr}.$$

Součet diferenciálů $r\cdot\mathrm{d}V_{ru}+V_{ru}\cdot\mathrm{d}r$ je to samé jako $\mathrm{d}(r\cdot V_{ru})$, takže poslední rovnici lze také psát ve tvaru:

$$\omega_{a1}=\frac{\mathrm{d}(r\cdot V_{ru})}{r\cdot\mathrm{d}r}.$$

Rotace způsobená od přírůstku rychlosti V_r v obvodovém směru už je bez záludností:

$$\omega_{a2}=-\frac{\mathrm{d}V_{ur}}{\mathrm{d}u}.$$

Takže pro úhlovou rychlost ve směru osy *a* můžeme psát:

$$\omega_a=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}(r\cdot V_{ru})}{r\cdot\mathrm{d}r}-\frac{\mathrm{d}V_{ur}}{\mathrm{d}u}\right).$$

Opět lze diferenciál pro oblouk upravit podle vzorce v oddílu P421/1 na tvar:

$$\omega_a=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}(r\cdot V_{ru})}{r\cdot\mathrm{d}r}-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V_{ur}}{\mathrm{d}\theta}\right).$$

Poslední rovnici ještě zapíšeme pomocí pravidel pro parciální derivace:

$$\omega_a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot V_{ru})}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial V_{ur}}{\partial\theta}\right).$$

P421/4: Podle pravidel vektorové analýzy lze zapsat jednotlivé složky vektoru úhlové rychlosti z P421/1, P421/2 a P421/3 ve tvaru:

$$\frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\vec{V}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_a}{\partial\theta}-\frac{\partial V_\theta}{\partial a}\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(\frac{\partial V_r}{\partial a}-\frac{\partial V_a}{\partial r}\right)\vec{\mathrm{j}}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot V_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\vec{\mathrm{k}}.$$