PŘÍLOHA 1296: Technické nauky, Technická matematika, Vektorová analýza ustáleného zrychlení

Zrychlení je derivace rychlosti podle času. Chceme-li znát jednotlivé složky zrychlení, pak musíme použít pravidla pro totální derivaci, respektive diferenciál, protože zrychlení může být funkcí až tří směrů a tedy i jeho složky mohou být funkcí tří směrů:

$$\vec{a}\left(\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t};\ \frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t};\ \frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}.$$

P1296/2: Podle VZORCE 377 (s. 40) pro totální diferenciál lze vyjádřit jednotlivé diferenciály rychlostí takto:

$$\mathrm{d}V_x=\frac{\partial V_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial V_x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial V_x}{\partial z}\mathrm{d}z,$$
$$\mathrm{d}V_y=\frac{\partial V_y}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial V_y}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial V_y}{\partial z}\mathrm{d}z,$$
$$\mathrm{d}V_z=\frac{\partial V_z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial V_z}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial V_z}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

P1296/3: Dále lze rozepsat totální derivaci složky rychlosti V_x podle času t lze rozepsat takto:

$$\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V_x}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}.$$

Podobně pro zbývající dvě derivace:

$$\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}=V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z},$$
$$\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t}=V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

P1296/4: Derivaci jednotlivých složek nyní dosadíme do zápisu vektoru z oddílu P1296/1:

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{i}}+\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{j}}+\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{k}}=\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{\mathrm{i}}+$$
$$+\left(V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\mathrm{j}}+\left(V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\vec{\mathrm{k}}.$$

P1296/5: Zkrátit zápis této rovnice lze vynásobením každého členu jedničkou podle [Rektorys et al., 2003, s. 222]:

$$\vec{a}=\left(V_x\vec{i}\,\vec{i}\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\vec{j}\,\vec{j}\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\vec{k}\,\vec{k}\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{i}+$$
$$+\left(V_x\vec{i}\,\vec{i}\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\vec{j}\,\vec{j}\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\vec{k}\,\vec{k}\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(V_x\vec{i}\,\vec{i}\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\vec{j}\,\vec{j}\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\vec{k}\,\vec{k}\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\vec{k}.$$

Nyní z každé složky vektoru zrychlení lze vytknout vektor rychlosti podle pravidla pro skalární součin dvou vektorů:

$$\vec{a}=\vec{V}\left(\vec{i}\frac{\partial V_x}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial V_x}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{i}+\vec{V}\left(\vec{i}\frac{\partial V_y}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial V_y}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{j}+$$
$$+\vec{V}\left(\vec{i}\frac{\partial V_z}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial V_z}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\vec{k}.$$

P1296/6: Součet parciálních derivací podle směru se u fyzikálních vektorových rovnic vyskytují často a tak byl pro vektorovou analýzu zaveden tzv. operátor nabla ve tvaru:

$$\nabla=\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z};\qquad \nabla=\vec{\mathbf{i}}\frac{\mathbf{1}}{r}\frac{\partial(r)}{\partial r}+\vec{\mathbf{j}}\frac{\mathbf{1}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial a}$$

vlevo-operátor nabla pro pravoúhlou soustavu souřadnic; vpravo- operátor nabla pro válcovou soustavu souřadnic [Rektorys et al., 2003, s. 227]

Operátor můžeme násobit zleva i zprava, ale pokaždé platí jiné pravidlo. Při násobení zleva jinou veličinou či vektorem se jedná o pouhý součin této veličiny a příslušné derivace. Například takto:

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla=\boldsymbol{u}\cdot\vec{\boldsymbol{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{u}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{u}\cdot\vec{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

V případě násobení zprava chceme provést derivaci dané veličiny či vektoru. Například takto:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\vec{\boldsymbol{i}}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}+\vec{\boldsymbol{j}}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}+\vec{\boldsymbol{k}}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial z}.$$

Pomocí operátoru nabla lze zapsat vektorovou rovnici v oddílu P1296/5 takto:

$$\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{V}}(\nabla\cdot V_x)\vec{\boldsymbol{i}}+\vec{\boldsymbol{V}}(\nabla\cdot V_y)\vec{\boldsymbol{j}}+\vec{\boldsymbol{V}}(\nabla\cdot V_z)\vec{\boldsymbol{k}}=$$
$$=\vec{\boldsymbol{V}}\nabla\cdot V_x\vec{\boldsymbol{i}}+\vec{\boldsymbol{V}}\nabla\cdot V_y\vec{\boldsymbol{j}}+\vec{\boldsymbol{V}}\nabla\cdot V_z\vec{\boldsymbol{k}}.$$

Z poslední rovnice lze vytknout vektor rychlosti:

$$\vec{\boldsymbol{a}}=(\vec{\boldsymbol{V}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{V}}.$$