PŘÍLOHA 1087: Technické nauky, Technická matematika, Určení zrychlení plynu potrubí pomocí aplikace gradientu funkce

Vyšetřované potrubí rozdělíme na n-počet elementů ve směru osy-x o velikost Δx (viz OBRÁZEK 1087, s. 47). Mezi hranicemi těchto elementů budeme počítat změny vyšetřovaných veličin pomocí gradientů, respektive diferenciálních rovnic, které převedeme na diferenční. Základní rovnicí, kterou použijeme při popisu proudění v chladícím kanálku je zákon zachování energie při proudění, tak jak je zapsán formou gradientů na OBRÁZKU 746 (s. 46). Přičemž plyn nekoná vnější práci (grad w=0) a gradient potenciální energie od vnějších zrychlení je roven záporné hodnotě gravitačního zrychlení (grad e=-q⃗ – znaménko mínus protože, potenciální energie roste proti směru gravitačního zrychlení, v tomto případě poroste potenciální energie plynu, tak jak bude plyn postupovat směrem nahoru). Dále v termomechanice je součet vnitřní tepelné energie a tlakové energie označován jako entalpie, viz článek Technická termomechanika:

$$\mathbf{grad}\ h+\mathbf{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right)-\vec{g}=\mathbf{grad}\ q$$

h [J·kg^{-1}] entalpie.

Tato rovnice se dá interpretovat takto: plynu je dodáváno teplo q. To zvyšuje jeho entalpii, část tepla je také využita ke zvýšení potenciální energie. Při zvyšování entalpie se zvyšuje i teplota plynu podle rovnice (článek Technická termomechanika):

$\Delta h=c_p\cdot\Delta T$,

c_p [J·kg^{-1}·K^{-1}] tepelná kapacita plynu při stálém tlaku, T [°K] teplota plynu.

Jestliže se zvyšuje teplota, pak roste i měrný objem a plyn v potrubí konstantního průřezu musí zrychlovat.

P1087/2: Jedná se o 1D proudění bez mezní vrstvy, takže gradienty jsou pouze jen ve směru osy-x. Při derivaci kinetické energie využijeme pravidlo pro derivaci kvadrátu diferenciálu:

$$u\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

Odtud:

$$\frac{\partial h}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial x}-g=\frac{\partial q}{\partial x}.$$

P1087/3: V rovnici jsou tři derivace, respektive gradienty. Nyní záleží jak je výměník konstruován a jaké je rozložení tepelného výkonu podél délky trubky. V tomto případě zaveďme předpoklad, že

tepelný výkon je rovnoměrný podél osy trubky, takže množství dodaného tepla je přibližně podle lineární rovnice:

$$q = a_q \cdot x,$$

a_q [J·m^{-1}·kg^{-1}] konstanta.

Odtud pro gradient tepla:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = a_q.$$

Hodnota gradientu a_q bývá v řádech 10000 (100 000) J·m^{-1}. Odtud je zřejmé, že gravitační zrychlení o velikosti 9,81 je ve výpočtech na levé straně rovnice nevýznamné. Význam má pouze při volné konvekci, při velmi malém tepelné toku, například při proudění v komíně apod.

Dosazením poslední derivace lze tedy energetickou rovnici psát ve tvaru:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial x} = a_q + g.$$

P1087/4: Entalpie je součin tepelné kapacity a teploty (viz oddíl P1087/1):

$$\frac{\partial h}{\partial x} = c_p \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Odtud lze předposlední rovnici psát ve tvaru:

$$c_p \frac{\partial T}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial x} = a_q + g.$$

P1087/5: Lze dokázat, že rychlost V je funkcí teploty z rovnice kontinuity takto:

$$m = A \cdot \rho \cdot V \Rightarrow V = \frac{m}{A \cdot \rho},$$

m [kg·s^{-1}] hmotnostní tok plynu trubkou.

Ze stavové rovnice plynů lze vyjádřit hustotu jako funkci teploty.

$$\frac{p}{\rho} = r \cdot T,$$

r [J·kg^{-1}·K^{-1}] individuální plynová konstanta plynu.

Odtud lze rychlost vyjádřit takto:

$$V = \frac{m \cdot r \cdot T}{A \cdot p}.$$

Rychlost je tedy funkcí jak teploty a tlaku. Jelikož se jedná o proudění beze ztrát, tak tlak je dán čistě jen hmotností sloupce plynu nad vyšetřovanou souřadnicí x. Při diferenčním výpočtu

počítáme vždy vyšetřované veličiny jen na hranicích elementů. To znamená, že z pohledu výpočtu se mění tyto veličiny skokově na intervalu Δx. Takže na úseku Δx budeme přistupovat k tlaku jako ke konstantě.

Pro p=konst. by derivace rychlosti vyla následující:

$$V\frac{\partial V}{\partial x}=\left(\frac{m\cdot r}{A\cdot p}\right)^2 T\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Nyní lze rovnici pro energetickou bilanci ve směru osy-x (odstavec P1087/4) rozšířit na tvar:

$$c_p\frac{\partial T}{\partial x}+\left(\frac{m\cdot r}{A\cdot p}\right)^2 T\frac{\partial T}{\partial x}=a_q+g.$$

P1087/6: Gradient teploty ve směru-x lze nyní vypočítat algebraickými úpravami poslední rovnice takto:

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left[c_p+\left(\frac{m\cdot r}{A\cdot p}\right)^2 T\right]=a_q+g$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{a_q+g}{c_p+\left(\frac{m\cdot r}{A\cdot p}\right)^2 T}.$$

P1087/7: Při výpočtu rozložení teploty v potrubí tedy můžeme postupovat takto: nejprve vypočítáme gradient teploty podle poslední rovnice, pro tlak a teplotu na okraji prvního elementu (vstup). Z hodnoty gradientu a velikosti elementu lze vypočítat zvýšení teploty, respektive teplotu na vstupu do dalšího elementu. Lze také vypočítat střední teplotu prvního elementu a tedy i jeho hustotu, hmotnost a odtud i snížení tlaku, respektive tlak na hranici sousedního elementu.

Gradient tlaku v k-tém elementu vypočítáme převedením diferenciální rovnice v oddílu P1087/6 na diferenční rovnici:

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_k=\frac{a_q+g}{c_p+\left(\frac{m\cdot r}{A\cdot p_k}\right)^2 T_k}.$$

Teplota $T_{k=1}=T_i$, teploty na vstupu do dalších elementů vypočítáme z gradientu teploty elementu předchozího:

$$T_k=T_{k-1}+\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{k-1}\Delta x_k.$$

Tlak $p_{k=1}=p_i$, tlaky na vstupu do dalšího budou menší o hydrostatický tlak odpovídající výšce předchozího elementu. Hmotnost předchozího elementu lze vypočítat z jeho střední hustoty mezi hustotami na hranicích elementu. Problém vyvstává v tom, že tlak je funkcí hustoty i teploty, to znamená, že celý

výpočet bude iterační, kdy hodnotu tlaků budeme odečítat z předchozí iterace. :

$$p_k = p_{k-1} - g\left(\frac{\rho_k + \rho_{k-1}}{2}\right)_{i-1} \Delta x_{k-1},$$

i označuje iteraci – i-1 jsou údaje z předchozí iterace.

Přičemž v první iteraci vycházíme z konstantní hodnoty tlaku, který je roven tlaku p_i.

Hustotu uvnitř elementu vypočítáme z tlaku a teploty na jeho hranicích ze stavové rovnice plynů, viz oddíl P1087/5:

$$\frac{p_k}{\rho_k} = r \cdot T_k.$$

Rychlost plynu lze vypočítat pomocí odvozené vzorce v oddílu 1087/5:

$$V_k = \frac{m}{A \cdot \rho_k}.$$

Výpočet zastavíme po takových až další iterace přinese jen malé zpřesnění, respektive dosáhneme přesnosti na požadovaný počet desetinných míst.

P1087/8: V tomto oddílu je proveden výpočet pro tyto parametry:

l	Δx	k	c_p	a_q	T_i	p_i	V_i	r	g	d
1	1	101	1	100	373,15	1	10	287	9,81	1

l, d [m]; Δx [cm]; k [-]; c_p [kJ·kg^{-1}·K^{-1}]; a_q [J·m^{-1}·kg^{-1}·10^{-3}]; T [K]; p [MPa]; V [m·s^{-1}]; r [J·kg^{-1}·K^{-1}]; g [m·s^{-2}].

Hmotnostní tok m vypočítáme z parametrů na vstupu do trubky:

A	ρ_i	m
78,5398	9,3376	7,3337

A [mm^2]; m [g·s^{-1}]; ρ [kg·m^{-3}]

První iterace výpočtu dá tyto výsledky:

k	x	p_k	$(\Delta T/\Delta x)$	T_k	ρ_k	V
1	0	1	100,010	373,15	9,3376	10,000
2	1	1	100,010	374,15	9,3126	10,027
3	2	1	100,010	375,15	9,2878	10,054
.	.	.	.	.	.	.
99	98	1	100,010	471,16	7,3952	12,627
100	99	1	100,010	472,16	7,3795	12,653
101	100	1	100,010	473,16	7,3639	12,680

k [-]; x [cm]; p [MPa]; T [K]; ρ [kg·m^{-3}]; V [m·s^{-1}]

Ovšem ani po třetí iteraci se nijak významně parametry nemění, což je dáno tím, že hustota

I potřetí iteraci se hodnoty mění nepatrně:

k	x	p_k	$(\Delta T/\Delta x)$	T_k	ρ_k	V
1	0	1	100,01	373,15	9,3376	10,000
2	1	1	100,01	374,15	9,3126	10,027
3	2	1	100,01	375,15	9,2878	10,054
.	.	.	.	.	.	.
99	98	0,9999	100,01	471,16	7,3946	12,628
100	99	0,9999	100,01	472,16	7,3789	12,654
101	100	0,9999	100,01	473,16	7,3633	12,681

k [-]; x [cm]; p [MPa]; T [K]; ρ [kg·m^{-3}]; V [m·s^{-1}]

V reálném výměníku se musí započítat i vliv vedení tepla a mezní vrstvy. To lze zvýšením počtu elementů a výpočtem gradientů i v jiných směrech.

P1087/9: Na závěr ještě důkaz, že gradient kinetické energie odpovídá zrychlení tekutiny v daném směru.

Kinetickou energii 1 kg tekutiny neboli měrnou kinetickou energii lze vyjádřit vzorcem:

$$e=\frac{V^2}{2}.$$

Cílem je tedy dokázat následující rovnost:

$$\mathbf{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)=\vec{a}(a_x;a_y;a_z),$$

kde $a^{\rightarrow}$ [m·s^{-1}] je vektor zrychlení

Kvadrát rychlosti V^2 je roven:

$$V^2=V_x^2+V_y^2+V_z^2.$$

Potom parciální derivace kinetické energie ve směru-x je rovna:

$$\frac{\partial\left(\frac{V^2}{2}\right)}{\partial x}\vec{\mathbf{i}}=\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{\mathbf{i}}.$$

Podobně pro zbývající dva směry:

$$\frac{\partial\left(\frac{V^2}{2}\right)}{\partial y}\vec{\mathbf{j}}=\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)\vec{\mathbf{j}},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{V^2}{2}\right)}{\partial z}\vec{\mathbf{k}}=\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial z}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial z}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\vec{\mathbf{k}}.$$

Odtud lze pro gradient kinetické energie psát:

$$\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)=\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{\mathbf{i}}+$$
$$+\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)\vec{\mathbf{j}}+\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial z}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial z}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\vec{\mathbf{k}}.$$

V PŘÍLOZE 1296 je vektorový zápis zrychlení $\vec{a}$ ve tvaru:

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{i}+$$
$$+\left(V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\vec{k}=$$
$$=(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}.$$

Když tyto dvě rovnice porovnáme zjistíme, že se rovnice pro gradient kinetické energie liší od rovnice zrychlení v každém směru od dvě derivace. Nicméně současně musí platit, že řešíme gradient potenciálního proudění (nevířivého) nikoliv obecného. Pro potenciální proudění musí platit, že rotace vektoru rychlosti je rovna nule (všechny složky vektoru rotace jsou rovny nule), takže podle definičního vzorce pro rotaci (VZOREC 421, s. 53), platí pro derivace tyto rovnosti:

$$\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}=\mathbf{0};\ \frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}=\mathbf{0};\ \frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}=\mathbf{0}.$$

Dosazením těchto rovností do rovnice pro gradient kinetické energie získáme:

$$\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)=\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{i}+$$
$$+\left(V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\vec{k}=$$
$$=(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}.$$

Což je stejná vektorová rovnice jako pro zrychlení.