PŘÍLOHA 1047: Technické nauky, Technická matematika, Příklad aplikace derivace

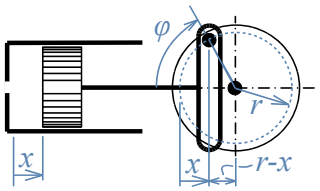
Nejprve odvodíme rovnice pohybu pístu, pak stanovíme rychlost pístu pomocí diferenčního počtu a nakonec i pomocí diferenciálního počtu.

Zadané parametry úlohy jsou:

r	N
22	60

r [mm]; N [min^{-1}]

P1047/2: Vzorec pro výpočet polohy pístu x v závislosti na pootočení hřídele φ lze odvodit pomocí trigonometrických rovnic a obrázku, na kterém je graficky vyznačen vztah mezi posunem pístu a pootočení hřídel:



Rozdíl x-r lze vypočítat takto:

$$\cos\varphi=\frac{r-x}{r}$$

$$x=r-r\cos\varphi=r(1-\cos\varphi).$$

Úhel φ je proměnný v čase, přičemž tuto závislost lze vyjádřit pomocí úhlové hřídele ω, která je funkcí otáček N:

$\varphi=\omega\cdot t$,
ω [°·s^{-1}] úhlová rychlost hřídele.

Úhlovou rychlost ω lze vypočítat z otáček hřídele N pomocí vzorce:

$$\omega=2\pi N.$$

Odtud:

$$\varphi=2\pi N\cdot t\Rightarrow t=\frac{\varphi}{2\pi N}.$$

P1047/3: Protože otáčky jsou konstantní a diference úhlu pootočení také, pak jsou i časové intervaly mezi jednotlivými polohami konstantní a lze psát:

$$\Delta t=\frac{\Delta\varphi}{2\pi N}.$$

P1047/4: Hledáme derivace funkce polohy pístu podle času.

$$V=\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}=f'_1(t)=?.$$

Funkce polohy pístu x je uvedena na OBRÁZKU 1047/3a (s. 34):

$$f_1(t)=r(1-\cos(2\pi N\cdot t)).$$

Funkce $f_1(t)$ je součtem dvou funkcí:

$$f_1(t)=r-r\cos(2\pi N\cdot t)=f_a(t)+f_b(t);\ f_a(t)=r,\ f_b(t)=-r\cos(2\pi N\cdot t).$$

Z pravidel derivování platí, že výsledná derivace funkce, která je součtem dvou a více funkcí je součtem derivací těchto jednotlivých funkcí, takže hledáme výsledek těchto derivací:

$$f'_1(t)=f'_a(t)+f'_b(t).$$

Derivace funkce $f_a(t)$ je snadná, protože je to konstanta a jak již víme, tak derivace konstanty je nula:

$$f'_a(t)=0.$$

Funkce $f_b(t)$ je tzv. složená funkce, kdy jedna funkce je proměnnou v jiné funkci:

$$f_b(t)=f_c(f_d(t))=-r\cos(2\pi N\cdot t);\ f_d(t)=2\pi N\cdot t.$$

Zde leze použít pravidlo pro derivování složených funkcí:

$$[f_c(f_d(t))]'=f'_c(f_d(t))\cdot f'_d(t).$$

V derivaci $f'_c(f_d(t))$ vystupuje $f_d(t)$ beze změny:

$$f'_d(t)=2\pi N,$$
$$f'_c(f_d(t))=r\sin(2\pi N\cdot t).$$

Odtud:

$$[f_c(f_d(t))]'=2\pi N\cdot r\sin(2\pi N\cdot t)=f'_b(t).$$

Hledaná derivace funkce $f_1(t)$ je:

$$f'_1(t)=0+2\pi N\cdot r\sin(2\pi N\cdot t)=V.$$

Za čas lze zpět dosadit úhel otočení hřídele z odstavce 1047/2:

$$V=2\pi N\cdot r\sin\varphi.$$