

# 39. MACHOVO ČÍSLO A EFEKTY PŘI PROUDĚNÍ VYSOKÝMI RYCHLOSTMI

*Jiří Škorpík, ORCID: 0000-0002-3034-1696, skorpik.jiri@email.cz*

## Úvod 1

### Dopady konečné velikosti rychlosti zvuku na kontinuitu proudu 1

- Šíření zvuku při nízkých rychlostech 1
- Šíření zvuku při vysokých rychlostech a vznik rázových vln 3
- Hugoniotův teorém 4

### Druhy rázových vln 5

- Kolmá (přímá) rázová vlna 5
- výpočet ztráty při průchodu proudění kolmou rázovou vlnou [Ú.896] 7
- Šikmá rázová vlna 7
- výpočet parametrů šikmé rázové vlny na špici letounu [Ú.1007] 8
- Nedosažitelné kompresní vlny 8
- $\lambda$ -rázová vlna 9

## Expanzní vlny 10

### Charakteristika obtékání tělesa vysokou rychlostí 12

## Odkazy 13

## Přílohy 14

- 333 Odvození rovnic stabilní kolmé rázové vlny (Rankine-Hugoniotovy rovnice) 14
- 337 Odvození rovnice pro rychlost zvuku 16
- 518 Odvození Hugoniotova teorému 19
- 896 Řešení úlohy 21
- 1007 Řešení úlohy 22

## Úvod

*Při vysokých rychlostech dochází k významným změnám hustoty a vzniku efektů, které u nízkých rychlostí nepozorujeme*

Obecně je za vysokou rychlost považována rychlost, při které je dosaženo takové velikosti Machova čísla (*Rovnice 337*) proudy tekutiny, při kterém už pro danou aplikaci nelze uvažovat tekutinu za nestlačitelnou. Stlačitelnost totiž způsobuje efekty v proudění, které se při proudění nestlačitelných tekutin nebo nízkých Machových číslech nevyskytují. Právě o obecných projevech vlastností stlačitelných tekutin při proudění pojednává tento článek.

### Rovnice 337

$$Ma = \frac{c}{a}$$

$$a = \sqrt{\kappa \cdot r \cdot T} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

$c$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] rychlost tělesa nebo proudění;  $a$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] rychlost šíření zvuku v dané tekutině [12, s. 534];  $\kappa$  [1] poměr tepelných kapacit<sup>43</sup>;  $r$  [ $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ] individuální plynová konstanta;  $T$  [K] absolutní teplota plynu (statická teplota);  $p$  [Pa] tlak;  $\rho$  [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ] hustota. Machovo číslo je definováno jako poměr mezi rychlostí tělesa nebo rychlostí proudění a rychlostí zvuku v tekutině vyplňující vyšetřovaný prostor. Odvození rovnice pro rychlost zvuku je v *Příloze 337*, s. 16.

*Machovo číslo a rychlost zvuku*

*Podzvukové proudění,  
Transonické proudění,  
Zvukové proudění,  
Nadzvukové proudění*

Jestliže je v okolí vyšetřovaného bodu tekutiny Machovo číslo menší než jedna ( $Ma < 1$ ), pak mluvíme o podzvukovém (subsonických) proudění. Jestliže se v okolí vyšetřovaného bodu tekutiny pohybuje hodnota Machova čísla kolem 1, konkrétně v rozmezí  $0,8 < Ma < 1,3$ , pak mluvíme o transonickém proudění – speciálně při velikosti Machova čísla právě 1 ( $Ma = 1$ ) mluvíme o zvukovém (sonické) proudění. Jestliže se v celém okolí vyšetřovaného bodu tekutiny pohybuje hodnota Machova čísla nad hodnotu 1 ( $Ma > 1$ ), pak mluvíme o nadzvukovém (supsonickém) proudění.

*Kritické Machovo číslo*

Někdy se setkáme s pojmem kritické Machovo číslo, toto číslo je vztaženo k nějakému jasně definovanému bodu v rámci vyšetřovaného objemu tekutiny, a jedná se o takovou velikost Machova čísla, při které se někde v daném objemu dosáhne zvukové nebo nadzvukové rychlosti (například v důsledku obtékání nějakých těles uvnitř).

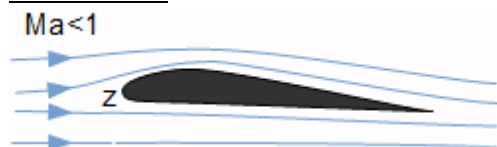
## Dopady konečné velikosti rychlosti zvuku na kontinuitu proudu

### Šíření zvuku při nízkých rychlostech

*Zvuk jako tlaková porucha i forma šíření informace*

Zvuk je tlaková porucha šířící se stlačitelným prostředím rychlostí zvuku  $a$ . Vzniklá tlaková porucha je zároveň informace o tlaku v okolí zdroje této poruchy pomocí, které se stlačitelné prostředí

přizpůsobuje zdroji tlakové poruchy, například na *Obrázku 520* díky šíření tlakové poruchy, která je rychlejší než nakreslený profil se vzduch rozestupuje (viz nakreslené proudnice) už před profilem; tlaková porucha šířící se od otvoru v tlakové nádobě směrem dovnitř nádoby, která způsobí, že plyn uvnitř nádoby začne proudit směrem k otvoru, kde je nižší tlak apod. Rychlost zvuku lze, z tohoto pohledu, také chápat jako rychlost šíření informace v daném prostředí.

**Obrázek 520**

z zdroj tlakové poruchy (zdroj zvuku). Nakreslený profil se pohybuje podzvukovou rychlostí směrem doleva.

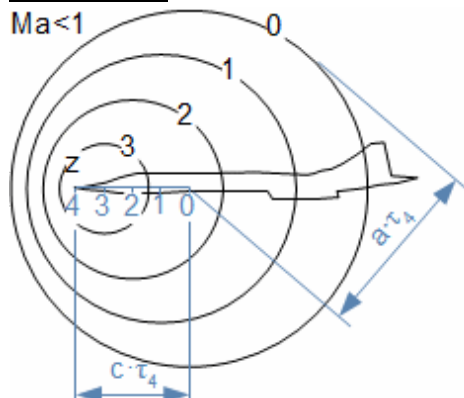
Charakteristika podzvukového proudění

Zvuk se šíří v kulových plochách

Tlaková porucha se v homogenním prostředí šíří v kulových plochách, tj. všemi směry stejnou rychlostí. Je-li zdroj tlakové poruchy v klidu (např. reproduktor...) tvoří hranici zvukové vlny v jednotlivých časech soustředné koule v jejichž středu je zdroj z tlakové poruchy. Rozdíl tlaku na rozhraní neporušeného prostředí a zvukové vlny se zmenšuje s rostoucím poloměrem zvukové vlny (klesá její energetická hustota neboli intenzita zvuku), tím také klesá vliv zvukové vlny na okolní prostředí.

Při pohybu zdroje roste intenzita zvuku ve směru pohybu

Při pohybu zdroje tlakové poruchy je energetická hustota ve směru pohybu zdroje vyšší, protože se centrum zvukových vln pohybuje ve směru šíření. Naopak za zdrojem dochází k ředění:

**Obrázek 772**

Kružnice 0 1 2 3 představují hranici zvukových vln v prostředí v čase  $\tau=0...3$ . V čase 0 je zdroj právě na souřadnici 0 v čase 1 na souřadnici 1 atd. Tj. v bodě 0 vyvolá zdroj tlakovou poruchu, která se šíří rychlostí zvuku v kulové ploše, poté co urazí zdroj vzdálenost 0-z bude mít poloměr zvukové vlny označený na obrázku symbolem 0. Stejný postup platí i pro tlakovou poruchu vyvolanou zdrojem v bodě 1 atd.

### Šíření zvuku při vysokých rychlostech a vznik rázových vln

*Při rychlostech  $Ma \geq 1$  přechází šíření tlakové poruchy od pohybu tělesa do formy rázové vlny*

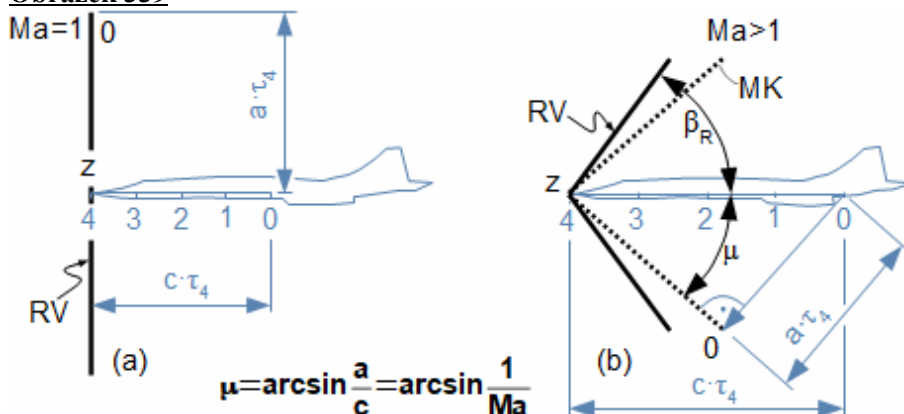
*Popis vzniku rázové vlny*

Pokud rychlost zdroje tlakové poruchy nebo proudění stlačitelného prostředí je blízká rychlosti zvuku nebo je dokonce vyšší, potom dochází k efektům narušující spojitost stlačitelného prostředí (skokové změny stavových veličin) a místo šíření tlakové poruchy formou zvukových vln se šíří formou tzv. rázových vln.

V případě, že se zdroj tlakové poruchy pohybuje rychlostí zvuku nebo vyšší ( $Ma \geq 1$ ) je čelo tlakových poruch neustále v místě zdroje. To způsobí, že proudnice se před obtékaným tělesem pozvolna nerozestupují a toto těleso je nuceno svým objemem okolní plyn vytěsnit prudkou kompresí – energie ke kompresi plynu v rázové vlně je brána z pohybu tělesa. Takto zkomprimovaný plyn postupně expanduje směrem od tělesa. Hranici mezi zkomprimovaným plynem a okolním doposud neovlivněným plynem má tvar kužele a nazývá se rázová vlna (Obrázek 339). Sklon rázové vlny  $\beta_R$  je dán rychlostí a velikostí tělesa a je vždy větší než úhel, který by vznikl při pohybu nekonečně tenkého tělesa stejnou rychlostí, tzv. Machův úhel  $\mu$ .

*Vztah mezi úhlem rázové vlny a Machovým úhlem*

**Obrázek 339**



(a) zdroj se pohybuje zvukovou rychlostí – RV je mírně skloněna dopředu. (b) zdroj se pohybuje nadzvukovou rychlostí.  $\mu$  [°] Machův úhel;  $\beta_R$  [°] sklon rázové vlny ( $\mu < \beta_R$ ); MK Machův kužel; RV rázová vlna. Názorná vizualizace vzniku a růstu rázové vlny při startu raketoplánu je ve zprávě [3]. Obrázek se nezabývá situací a velikostí rázových vln v čase před  $\tau=0$  a ani situací za rázovou vlnou, tj. za obtékaným tělesem, tento problém je popsán v další části článku.

*Objem komprimovaného plynu je stále doplňován pohybem tělesa*

Oproti zvukové vlně je rázová vlna stálá skoková změna stavových veličin (za rázovou vlnou je vyšší tlak, teplota i hustota. Situaci lze přirovnat k expandující kouli stlačeného plynu s tím, že vlivem pohybu tělesa je kompresí další plyn doplňován. Nicméně objem kužele roste s třetí mocninou doby pohybu a množství komprimovaného plynu je lineární (při konstantní rychlosti), takže se vzdáleností od špičky kuželu rázové vlny v něm klesá tlak (klesá hustota energie v rázové vlně), až se úplně vyrovná s okolním tlakem.

Stejných efektů dosáhneme při obtékání pevného tělesa proudem o vysoké rychlosti

Zatím bylo znázorněno šíření zvukových vln nebo vznik rázových vln při pohybu tělesa, ale stejného efektu je dosaženo i v opačném případě, kdy těleso je v klidu a je plynem obtékáno či kombinací, tj. těleso je v pohybu v proudu plynu. Příkladem profilu, který je v pohybu a obtékán proudem je lopatková mříž<sup>11</sup> rotoru.

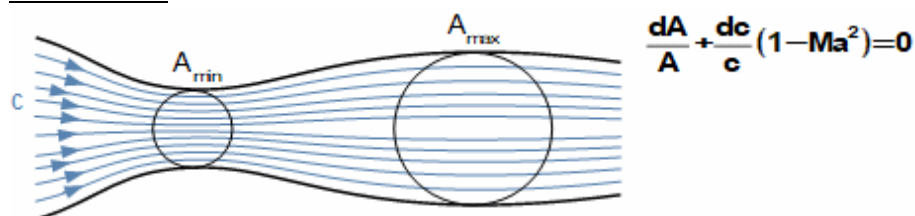
### Hugoniotův teorém

Proudění vysokou rychlostí v uzavřených kanálech

Rázové vlny nevznikají pouze v důsledku komprese plynu vloženým tělesem, ale mohou také vznikat při proudění nadzvukových rychlostí v kanálech. Vznik rázových vln pro tyto případy predikuje Hugoniotův teorém, který popisuje rozdílné vlastnosti podzvukového a nadzvukového proudění při expanzi a kompresi, tím, že dokazuje souvislosti mezi změnou rychlosti proudění, průtočného průřezu a Machova čísla, *Vzorec 518*.

#### Obrázek 518

Hugoniotův teorém



$A$  [m] průtočný průřez. Tato rovnice se také označuje jako charakteristická rovnice proudění stlačitelné látky. Proudová trubice může být vytvořena pevnými stěnami nebo ostrou hranicí mezi dvěma prostředími s velmi odlišným stavem či vlastnostmi (kapalina versus plyn; řídký plyn versus rázová vlna na okraji apod.). **Pierre Henri Hugoniot** (1851-1887) byl francouzský vynálezce, matematik a fyzik. Zabýval se prouděním plynu v hlavních děl. Teorém sestavil v roce 1886. Odvození Hugoniotova teorému je provedeno v *Příloze 518*, s. 19.

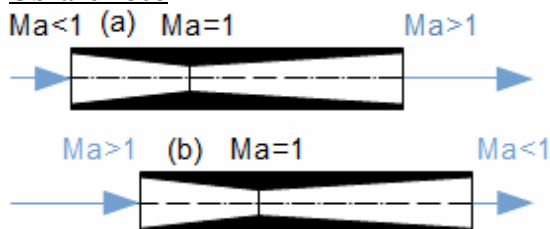
Predikce na základě Hugoniotova teorému

Kritická rychlost

Podle Hugoniotova teorému bude při podzvukové rychlosti na vstupu do zužující se trubice ( $Ma < 1$ ) docházet k nárůstu rychlosti a naopak, takže lze stanovit i místo v trubici, kde může proudění dosáhnout právě rychlosti zvuku ( $Ma = 1$ ), musí to být v místě lokálního extrému  $dA/A = 0$  – zbývá určit zda se jedná o minimální nebo o maximální průtočný průřez trubice. Z předchozího případu plyne, že nadzvukový proud dosáhne zvukové rychlosti pouze zmenšováním průtočného průřezu, proto rychlosti zvuku dosáhne proud v nejužším místě trubice. Zde dosáhne proudění lokální rychlosti zvuku – říkáme, že proudění dosáhlo kritické rychlosti  $c^*$ . Podle této rovnice by bylo možné teoreticky udržet zvukovou rychlost v celém objemu trubice konstantního průřezu, což v praxi není možné kvůli ztrátám.

Příklad vlivu vstupního Machova čísla na funkci kanálu proměnlivého průřezu

Chování nadzvukového proudění je tedy přesně opačné než proudění podzvukového, díky tomu dva tvarově totožné kanály fungují zcela odlišně při podzvukovém a nadzvukovém proudění na vstupu:

**Obrázek 868**

(a) supersonická tryska – do kanálu vstupuje podzvukové proudění, které zvyšuje svou rychlost až na  $Ma=1$  v nejužším průřezu, za tímto průřezem se rychlost dále zvyšuje až na vysoce nadzvukovou výstupní rychlost. Takto funguje Lavalova tryska<sup>40</sup>; (b) nadzvukový difuzor<sup>41</sup> – do kanálu vstupuje nadzvukové proudění, které snižuje svou rychlost na  $Ma=1$  v nejužším průřezu, za tímto průřezem se rychlost dále snižuje až na nízkou podzvukovou rychlost, tím se transformuje kinetická energie nadzvukového proudu na tlakovou energii<sup>43</sup>.

*Predikce vzniku  
rázových vln pomocí  
Hugoniotova teorému*

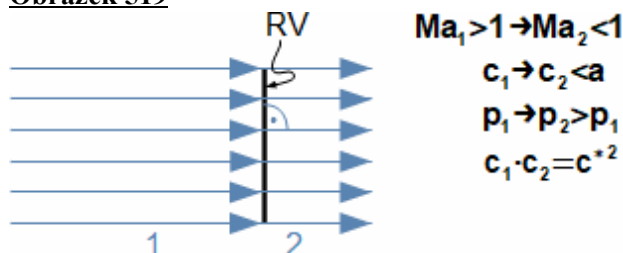
Z Hugoniotova teorému je zřejmé, že jediný možný způsob plynulého přechodu nadzvukového proudění ( $Ma > 1$ ) do podzvukového ( $Ma < 1$ ) je postupným zmenšováním průtočného průřezu až do okamžiku  $Ma=1$  (kdy  $A=min$ ) a následně jeho zvětšováním pro dosažení ( $Ma < 1$ ). Stroje, ve kterých může docházet k takto vysokým rychlostem lze reálně konstruovat jen pro konkrétní podmínky (lze dokázat, že poměr výstupního průtočného průřezu ku minimálnímu průřezu musí být pro rozdílná Machova čísla také rozdílná), při změně podmínek by bylo nutné měnit geometrii stroje, aby splňoval požadavky na přechod proudění z nadzvukového do podzvukového. To často není možné splnit a přechod se uskuteční v rozšiřující se části proudové trubice skokem, tj. skokovou změnou stavových veličin tedy rázovou vlnou, jen tak lze splnit podmínky Hugoniotova teorému (plynulý přechod není v takovém kanále možný – typickým příkladem je vznik rázové vlny při proudění Lavalovou tryskou při nenávrhovém stavu<sup>40</sup>). Při přechodu z podzvukového do nadzvukového proudění k náhlým (skokovým) změnám stavových veličin nedochází.

## Druhy rázových vln

### Kolmá (přímá) rázová vlna

*Skoková změna do  
podzvukového proudění  
při zachování směru  
proudění*

V kolmé rázové vlně se téměř skokově mění stavové veličiny plynu (tlak, teplota, hustota), *Obrázek 519, s. 6*. Po průchodu kolmou rázovou vlnou zůstává směr proudění stejný, ale mění se rychlost a hybnost proudu – za kolmou rázovou vlnou je vždy rychlost nižší, než je rychlost zvuku. Kolmá rázová vlna může vznikat například před letounem letícím rychlostí zvuku, v Lavalových tryskách při nenávrhových stavech apod.

**Obrázek 519**

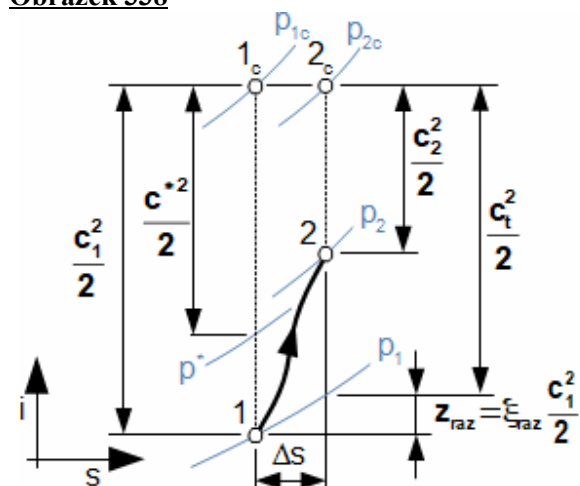
$c^*$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] kritická rychlost proudění<sup>40</sup>. Po průchodu kolmou rázovou vlnou se změny parametry plynu z hodnot označeny indexem 1 na hodnoty označené indexem 2. Odvození rovnic pro kolmou rázovou vlnu je provedeno například v [13, s. 372].

*Energetická bilance  
kolmé rázové vlny*

Energetickou bilanci kolmé rázové vlny s uspokojivým výsledkem poprvé stanovil německý fyzik **Ludwig Prandtl** (1875-1953, působil na univerzitě v Göttingenu; mimo jiné také významně přispěl k popisu proudění v Lavalových tryskách) zavedením předpokladu, že při skokové změně stavových veličin v rázové vlně dochází ke ztrátám, což se do té doby nepředpokládalo. Znamená to, že za kolmou rázovou vlnou má plyn vyšší entropii<sup>43</sup> než před ní, viz *Obrázek 338*.

**Obrázek 338**

*Změna stavu plynu při  
průchodu kolmou  
rázovou vlnou*



$i$  [ $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ ] měrná entalpie plynu;  $s$  [ $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ] měrná entropie plynu;  $p^*$  [Pa] kritický tlak (tlak, při kterém proudění při expanzi z bodu  $1c$  dosáhne rychlosti zvuku);  $c_t$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] teoretická rychlost plynu při izoentropické expanzi z tlaku  $p_{2c}$  do tlaku  $p_i$ ;  $z_{\text{raz}}$  [ $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ ] měrná ztráta v rázové vlně;  $\xi_{\text{raz}}$  [-] poměrná ztráta rázem (koeficient je funkcí Machova čísla a tvaru kanálu či obtékaného profilu, např. ztráta rázem při obtékaní profilu<sup>17</sup>). Změna stavových veličin plynu ze stavu 1 do stavu 2 probíhá téměř skokově (tloušťka rázové vlny je cca  $10^{-7}$  m [5]).

*Rankine-Hugoniotovy  
rovnice*

Měrná ztráta v rázové vlně nezávisí na geometrii obtékaného tělesa, ale pouze na vlastnostech plynu a jeho rychlosti, což je patrné z Rankine-Hugoniotových rovnic pro stav plynu před a za vlnou:

**Rovnice 333**

$$\text{Ma}_2^2 = \frac{\frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_1^2 + 1}{\kappa \text{Ma}_1^2 - \frac{\kappa-1}{2}}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_2^2}; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\text{Ma}_1}{\text{Ma}_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Rovnice jsou odvozeny pro stabilní kolmou rázovou vlnu a ideální plyn. Všimněte si, že jednotlivé poměry jsou funkcí pouze Machova čísla před vlnou a Piossonovou konstatou plynu. Těmto rovnicím a jejich odvozeninám se říká Rankine-Hugoniotovy rovnice. Odvození rovnic je provedeno v *Příloze 333*, s. 14.

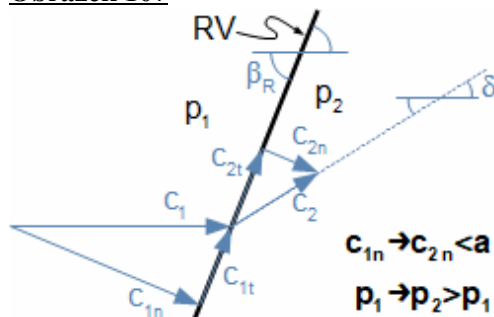
**Úloha 896**

V Lavalově trysce vznikla kolmá rázová vlna. Vypočítejte ztrátu při průchodu plynu touto vlnou. Rychlost plynu před vlnou je  $583,72 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , poměr tepelných kapacit pracovního plynu je  $1,4$ , individuální plynová konstanta je  $287 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , celková teplota plynu před rázovou vlnou je  $380,94 \text{ }^\circ\text{C}$ , tlak před rázovou vlnou je  $0,4144 \text{ MPa}$ , tlak za rázovou vlnou je  $0,7772 \text{ MPa}$ ; absolutní teplota plynu za vlnou je  $310,87 \text{ }^\circ\text{C}$ . Řešení úlohy je uvedeno v *Příloze 896*, s. 21.

**Šikmá rázová vlna**

*Průchod šikmou  
rázovou vlnou*

Před šikmou rázovou vlnou musí být rychlost nadzvuková, ale za ní může být proudění podzvukové i nadzvukové. Při průchodu proudění šikmou rázovou vlnou dochází navíc ke změně směru proudu o úhel  $\delta$ :

**Obrázek 107**

$\delta$  [°] odklon proudění za rázovou vlnou od původního směru.

*Energetická bilance a  
sílová rovnováha v  
šikmé rázové vlně*

Pro normálové složky rychlosti šikmé rázové vlny  $c_{1n}$ ,  $c_{2n}$  platí stejné vlastnosti jako pro rychlosti procházející kolmou rázovou vlnou – pro výpočet je možné použít Rankine-Hugoniotovy rovnice pro kolmou rázovou vlnu (*Rovnice 333*). Lze dokázat (např. [6, s. 126-127]), že platí rovnost tečných složek rychlosti  $c_{1t} = c_{2t}$ . Jestliže úhel  $\beta_R$  je stejný jako Machův úhel  $\mu$ , pak musí platit  $c_{1n} = a$  a jedná se pouze o zvukovou vlnu, což plyne z definice Machova úhlu. Dále lze dokázat, že k největší energetické ztrátě (nárůstu entropie) dochází při  $\beta_R = 90^\circ$  – to znamená, že ztráty v šikmé rázové vlně jsou menší než v kolmé pro stejný tlakový poměr mezi tlaky před a za vlnou.

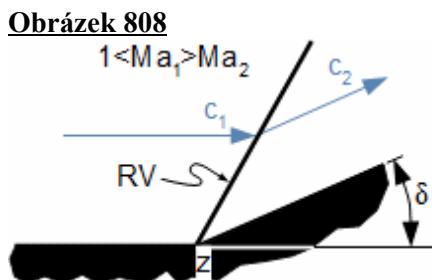
*Příklady vzniku  
šikmých rázových vln*

Šikmá rázová vlna vzniká například na hranách profilů pohybujících se nadzvukovou rychlostí, nebo pokud jsou obtékány nadzvukovým proudem, viz níže. Šikmou rázovou vlnu



může vytvořit i nerovnost na obtékané ploše (výrobní nerovnost, kapička nestlačitelné tekutiny v nadzvukovém proudě atd.) či rozhraní mezi nadzvukovým proudem a okolním prostředím, typickým příkladem je nadzvukový výtok plynu z Lavalovy trysky<sup>39</sup>. Šikmá rázová vlna vzniká také tam, kde se náhle zmenší průtočný průřez nadzvukovému proudění, jak je znázorněno na *Obrázku 808*.

*Vznik šikmé rázové vlny u paty náhle se zvedající obtékané plochy*



**Obrázek 808**

Tímto způsobem může vzniknout šikmá rázová vlna i při šikmém střetu dvou nadzvukových proudů, jak naznačuje *Obrázek 522*, s. 12. Jestliže je úhel  $\delta$  větší než odpovídá úhlu podle *Obrázku 107*, potom se rázová vlna posune ještě před začátek klínu [11, s. 150]. Zajímavá situace nastane v případě, jestliže náhle zvedající se plocha je nahrazena obloukem viz následující kapitola.

*Řízení vektoru tahu v raketových motorech šikmou rázovou vlnou*

Změny směru proudu při průchodu rázovou vlnou se využívá k záměrné změně směru nadzvukového proudění, například k řízení vektoru tahu raketových motorů<sup>40</sup> na tuhá paliva. V takovém případě je rázová vlna vytvořena pomocí kapičky nestlačitelné kapaliny (obvykle  $N_2O_4$ ) vstříknuté na vnitřní stranu trysky. Rázová vlna se iniciuje na této hranici kapičky.

#### Úloha 1007

Šikmá rázová vlna se sklonem  $40,9^\circ$  na špičce letounu odpovídající rychlosti  $Ma=2,5$ . Vypočítejte změny jednotlivých stavových veličin plynu při jeho průchodu vlnou, rychlost za vlnou a úhel odklonu  $\delta$ .  $\kappa=1,4$ ,  $t_1=20^\circ C$ ,  $p_1=101\,325,25\ Pa$ ,  $r=287\ J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}$ . Měrná tepelná kapacita plynu při stálem tlaku je  $1\ kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}$ . Řešení úlohy je uvedeno v *Příloze 1007*, s. 22.

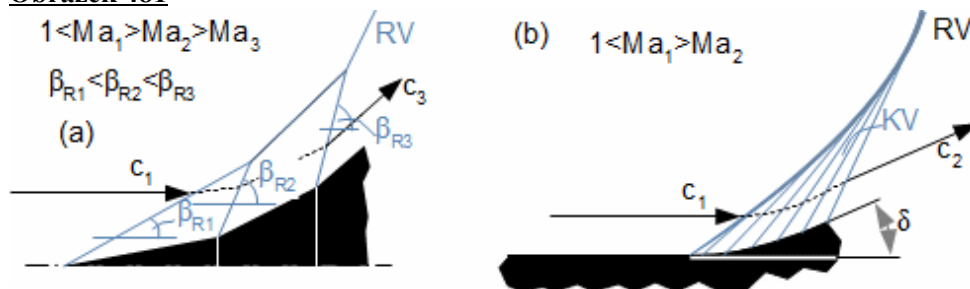
### Nedosažitelné kompresní vlny

*Plynulá izoentropická komprese v rázové vlně*

Kompresní vlna je útvar ekvivalentní rázové vlně. Jedná se o plynulou izoentropickou kompresi nadzvukového proudění ve zužujícím se prostoru tak, jak popisuje Hugoniotův teorém. V praxi ale tento děj není uskutečnitelný, protože snižování průtočného průřezu by muselo být nekonečně malé [11, s. 405]. Nejblíže ideálním kompresním vlnám je kumulace rázových vln (*Obrázek 481*). Pokud totiž za šikmou rázovou vlnou vznikne další šikmá rázová vlna, pak tato vlna bude mít větší úhel, takže tyto dvě vlny se v určité vzdálenosti od místa vzniku střetnou. V místě střetu se sečtou jejich účinky, tj. hybnost a tlak, tím vznikne nová šikmá rázová vlna s úhlem odpovídající tomuto součtu.

*Kumulace šikmých  
rázových vln*

**Obrázek 481**



(a) stupňující se plocha; (b) vznik kompresních vln u pozvolna se zvedající plochy [4]. KV soustava kompresních vln. Každá kompresní vlna představuje drobné zvýšení tlaku, současně se zvětšuje jejich sklon, protože se snižuje Machovo číslo, to znamená, že v místě kde se protnou bude tlak roven součtu zvýšení tlaků v jednotlivých kompresních vlnách, tak v těchto místech vzniká šikmá rázová vlna o nižší intenzitě, než je intenzita původních vln v místě zdroje tlakové poruchy. Proudění dále od plochy tedy prochází šikmou rázovou vlnou s větším úhlem  $\beta_R$  než při okrajích.

*Využití kumulace  
rázových vln v letectví  
ke snižování ztrát a  
efektů*

V letectví se provádí experimenty se snižováním zvukových efektů způsobené rázovými vlnami při nadzvukových letech založené na rozdělení rázové vlny na několik dílčích vln (zředění rázové vlny, viz *Obrázek 905*). Tímto způsobem se sníží nejen ztráty v rázových vlnách, ale především se tím dosáhne co největšího úhlu výsledné rázové vlny (poté co se setkají všechny rázové vlny od trupu letounu). Čím je totiž úhel rázové vlny větší (nejlépe  $90^\circ$ ), tím je zvukový efekt od vlny menší [14, s. 60] – což by umožňovalo dopravním letounům alespoň omezeně let vysokou rychlostí i v obydlých oblastech.

*Projekt Quiet Spike*

**Obrázek 905**



Projekt Quiet Spike se úspěšně zabýval možností snížit intenzitu zvukových efektů pomocí odstupňovaně prodloužené přídě letounu. Zde testování teleskopické přídě letounu F-15B [9].

### $\lambda$ -rázová vlna

*Typický efekt při  
transonickém obtékání  
těles*

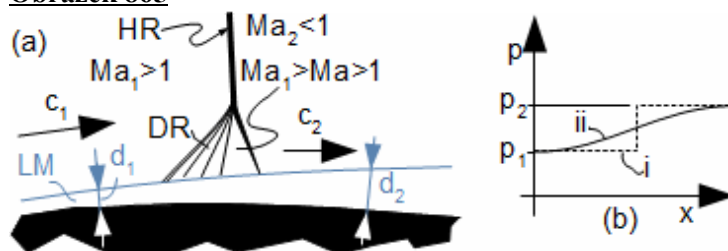
$\lambda$ -rázová vlna (*Obrázek 865*, s. 10) vzniká při obtékání těles transonickou rychlostí s laminární mezní vrstvou<sup>38</sup>. Samotná příčina vzniku rázové vlny při transonických rychlostech v okolí těles je popsána v kapitole *Charakteristika obtékání tělesa vysokou rychlostí*, s. 12.

*Popis příčin vzniku  
klínu  $\lambda$ -rázové vlny*

Protože v mezní vrstvě je podzvukové proudění, zvyšuje se v ní tlak postupně zároveň na úkor rychlosti. Tím se zvětšuje její

Charakteristika  $\lambda$ -  
rázové vlny

**Obrázek 865**



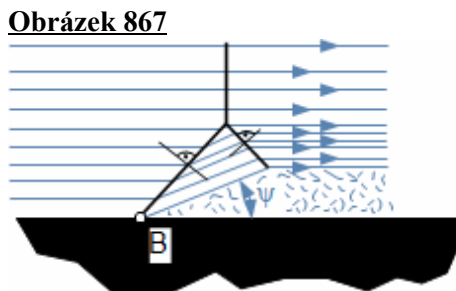
(a) celkový náhled; (b) průběh změny tlaku v rázové vlně a v mezní vrstvě. *i* průběh tlaku v jádru proudy těsně před a za rázovou vlnou; *ii* průběh tlaku v laminární mezní vrstvě. *P* stěna profilu; *x* [m] souřadnice profilu; *LM* laminární mezní vrstva; *d* [m] tloušťka mezní vrstvy; *HR* hlavní přímá rázová vlna; *DR* druhotné šikmé rázové vlny vznikající v důsledku zvětšení tloušťky mezní vrstvy.

tloušťka a vzniká klín od kterého dochází ke kumulaci šikmých rázových vln podle *Obrázku 481*. Výsledná rázová vlna je často mírně skloněna dopředu [1]. V případě turbulentního proudění<sup>38</sup> je klín velmi malý (turbulentní proudění není tak citlivé na změnu tlaku) a na hranici mezní vrstvy vzniká přímo kolmá rázová vlna.

Ztráty v  $\lambda$ -rázové vlny a jejich vliv na rychlostní profil

Obecně je ztráta v  $\lambda$ -rázové vlně menší než u přímé rázové vlny a větší než u šikmé [1, s. 201]. Z toho je také zřejmé, že proudnice, jenž prošly šikmými rázovými vlnami (ta část  $\lambda$ -vlny blíže k profilu), budou mít jinou rychlost (*i* když podzvukovou), než proudnice, které prošly přímo přes přímou rázovou vlnu. Navíc ke ztrátě rázovou vlnou je nutné přičíst ztrátu odtržením od profilu, která vzniká za  $\lambda$ -rázovou vlnou [1, s. 198], [6, s. 132], viz *Obrázek 867*.

Princip odtržení proudy od profilu za  $\lambda$ -vlnou



**B** bod odtržení;  $\psi$  [°] úhel odtržení.

## Expanzní vlny

Expanze nadzvukové proudění do nižšího tlaku

Pokud se nadzvukové proudění dostane do prostoru se zvyšujícím se průtočným průřezem musí expandovat do vyšší rychlosti, jak predikuje Hugoniotův teorém. Taková nadzvuková expanze probíhá formou expanzních vln.

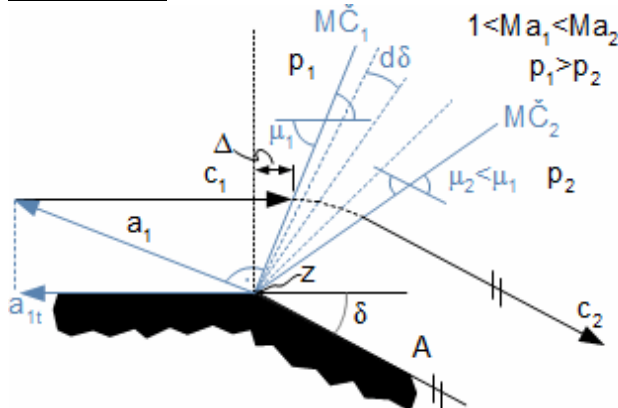
Příklad vzniku exp. vlny při obtékání tupého úhlu a její vnější projev

Zvyšující se průtočný průřez vytvářejí i tupé úhly na tělesech, například odtoková hrana projektilů, místa počátku zužování trupu letounů apod., viz *Obrázek 340*. Při obtékání tupých úhlů nadzvukovou rychlostí musí docházet k expanzi plynu z tlaku  $p_1$

na tlak  $p_2$  a ke zvýšení rychlosti proudu z  $c_1$  na  $c_2$ , zároveň dojde i k vychýlení směru proudícího plynu o úhel  $\delta$  od původního směru. V expanzní vlně nedochází ke skokové ale pozvolné změně stavových veličin při expanzi s velmi nízkými ztrátami (izoentropická expanze).

**Obrázek 340**

Charakteristika obtékání tupého úhlu nadzvukovou rychlostí



MČ Machova čára;  $\Delta$  [rad] odklon proudu při obtékání tupého úhlu.

Podrobný popis vzniku tvaru expanzní vlny

Machova čára  
Machův klín

Hrana  $z$  vyvolává tlakovou poruchu, která se šíří proti proudění rychlostí  $a_{1t}$ . První proudnice zareaguje okamžitě a začne expandovat do tlaku nižšího změnou směru proudění ve směru poklesu tlaku. Vzdálenější proudnice expanduje až za hranou  $z$ , protože než k ní dorazí tlaková porucha urazí vzdálenost  $\Delta$ . Hranice  $z$ , na které se začne měnit směr proudění a plyn expandovat je tzv. Machova čára nebo také první expanzní vlna. Je evidentní, že sklon této čáry je roven Machovu úhlu  $\mu_1$ . Na první Machově čáře započne tedy expanze plynu. Při expanzi dochází ke změně Machova čísla a i expanze mění svůj charakter, protože se mění Machův úhel. Expanze se ukončí na Machově čáře  $MČ_2$ , kde proudící plyn dosáhne tlaku  $p_2$ . První a poslední Machova čára vytváří Machův klín, ve kterém expanze plynu probíhá.

Maximální dosažitelné parametry exp. vlny a výpočet odklonu

Maximálního úhlu odklonu proudu při průchodu v expanzní vlnou  $\delta_{max}$  a maximální rychlosti  $c_{max}$  dosáhne proudění při expanzi do vakua  $p_2=0$ . Při expanzi do vakua bude  $Ma_2=\infty$ . Jestliže úhel sklonu hrany bude větší než  $\delta_{max}$  vznikne mezi hranou  $z-A$  a proudem mezera s vakuem. Hodnotu úhlu  $\delta$  lze stanovit z Prandtl-Meyerovy funkce v [8], viz *Rovnice 521*.

Prandtl-Meyerova funkce

**Rovnice 521**

$$\delta = \nu(Ma_2) - \nu(Ma_1)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \arctg \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1} (Ma^2 - 1)} - \arctg \sqrt{Ma^2 - 1}$$

Další místa, kde vznikají expanzní vlny

Expanzní vlny mohou také vznikat při nadzvukových rychlostech proudění ve výtoku z kanálů, například v šikmo

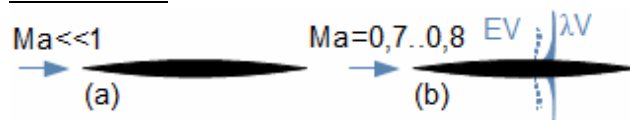
seříznutých tryskách<sup>40</sup> a velké problémy dělá i při nadzvukovém výtoku z lopatkového kanálu<sup>40</sup>.

## Charakteristika obtékání tělesa vysokou rychlostí

*Proudění kolem profilu při podzvukové a transonické rychlosti*

Z vyšetření tlakového pole kolem jakéhokoliv obtékaného profilu tělesa, například kolem profilu lopatky<sup>16</sup>, je očividné, že se podél profilu rychlost proudění postupně zvyšuje, a poté co se začne profil zužovat se začne i rychlost snižovat. Při dostatečně vysoké rychlosti proudu před profilem (transonická rychlost) může dosáhnout i rychlosti zvuku, to způsobí, že v místě, ve kterém se profil začne zužovat vzniknou expanzní vlny, a rychlost proudění se za tímto bodem ještě více zvýší. Protože rychlost na konci profilu je podzvuková vznikne ještě před odtokovou hranou  $\lambda$ -rázová vlna, *Obrázek 800*.

**Obrázek 800**



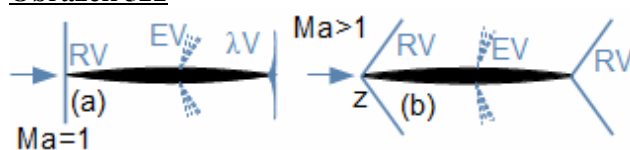
(a) podzvuková rychlost; (b) vznik efektů při transonických rychlostech [7, s. 179], [10, s. 78]. EV expanzní vlna,  $\lambda V$   $\lambda$ -rázová vlna.

*Charakteristika obtékání čočkovitého profilu při  $Ma < 1$*

*Proudění kolem profilu při zvukové a nadzvukové rychlosti*

Čím větší je rychlost před profilem, tím více se vznik  $\lambda$ -rázových vln posouvá k odtokové hraně profilu – při rychlosti zvuku proudu před profilem se posune až na konec odtokové hrany a na náběžné hraně profilu se začne tvořit kolmá rázová vlna, *Obrázek 522*.

**Obrázek 522**



(a) rychlost proudění dosahuje právě rychlosti zvuku; (b) efekty při nadzvukovém proudění [7, s. 179], [10, s. 78]. Všimněte si vzniku rázových vln při šikmé "srážce" dvou nadzvukových proudů na odtokové hraně.

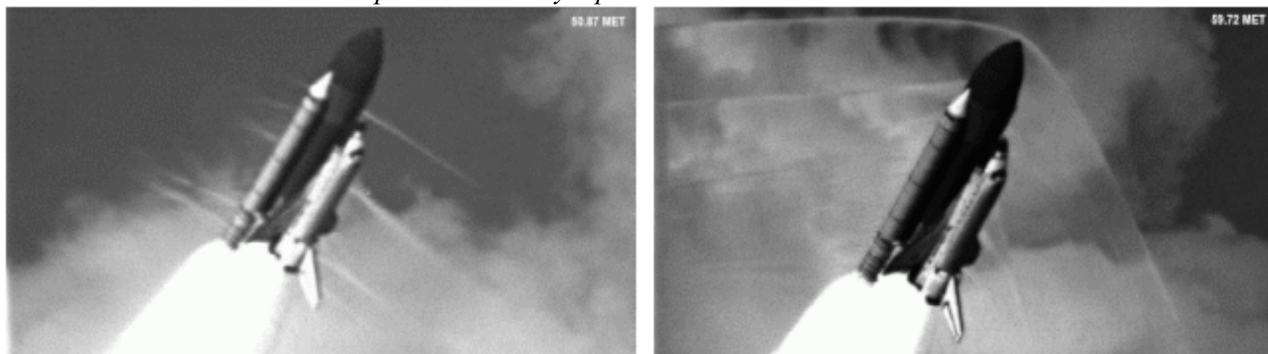
*Charakteristika obtékání čočkovitého profilu při  $Ma \geq 1$*

*Vliv vysoké rychlosti profilu na jeho součinitel odporu a vztlaku*

Efekty vznikající při obtékání těles vysokými rychlostmi ovlivňují součinitel odporu<sup>16</sup> obtékaného tělesa. Maximálních hodnot dosahuje součinitel odporu při transonických rychlostech proudění, kdy vznikají  $\lambda$ -rázové vlny. Po opuštění transonické oblasti při vzniku šikmých rázových vln součinitel odporu opět klesá, jak je ukázáno na příkladu obtékání vzduchu kolem trupu raketoplánu na *Obrázku 897*. Podobně dramaticky se mění

**Obrázek 897**

*Charakteristika obtékání raketoplánu stlačitelným prouděním během startu*



Snímky zachycují let raketoplánu Discovery (STS-114, 2005) 50,87 s po startu (vlevo) a 59,72 s (vpravo). 50,87 s po startu má raketoplán vysokou transonickou rychlost ( $1,2 Ma$ , aerodynamický odpor dosahuje maxima), v 59,72 s dosahuje raketoplán rychlosti  $1,5 Ma$  (aerodynamický odpor klesá). Zdroj obrázku [3].

## Odkazy

[1] HOŠEK, Josef. *Aerodynamika vysokých rychlostí*, 1949. 1. vydání. Praha: Naše vojsko. [2] KALČÍK, Josef, SÝKORA, Karel. *Technická termomechanika*, 1973. 1. vydání, Praha: Academia. [3] O'FARRELL, J.M., RIECKHOFF, T.J. *Direct Visualization of Shock Waves in Supersonic Space Shuttle Flight*, 2011. Technical Memorandum. George C. Marshall Space Flight Center, AL 35812. [4] NOŽIČKA, Jiří. Osudy a proměny trysky Lavalovy, *Bulletin asociace strojních inženýrů*, 2000, č. 23. Praha: ASI, Technická 4, 166 07. [5] HLOUŠEK, Jiří. *Termomechanika*, 1992. 1. vydání. Brno: Vysoké učení technické v Brně, ISBN 80-214-0387-X. [6] KADRNOŽKA, Jaroslav. *Tepelné turbíny a turbokompresory*, 2004. 1. vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., ISBN 80 – 7204 – 346 – 3. [7] STEVER, Guyford, HAGGERTY James. *Flight*, 1966. První vydání. Time Inc. [8] Autor neuveden. *Expansion fan – Isentropic flow*, 2010. Washington, D.C: National Aeronautics and Space Administration – NASA, [on-line]. Dostupné z <http://www.grc.nasa.gov>. [9] CREECH, Gray. *Supersonic Jousting*, 2009. Washington, D.C: National Aeronautics and Space Administration – NASA, [on-line]. Dostupné z <http://www.nasa.gov>. [10] KNEUBUEHL, Beat. *Balistika střely, přesnost střelby, účinek*, 2004. První české vydání. Praha: Naše vojsko, ISBN 80-206-0749-8. [11] DEJČ, Michail. *Technická dynamika plynů*, 1967. Vydání první. Praha: SNTL. [12] HORÁK, Zdeněk. KRUPKA, František, ŠINDELÁŘ, Václav. *Technická fyzika*, 1961. 3. vydání. Praha: SNTL. [13] MACUR, Milan. *Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua*, 2010. Brno: Vutium, ISBN 978-80-214-3944-3. [14] HOŠEK, Josef. *Dnešní letectví: nové vývojové směry v letectví*. Praha: Práce, 1962. Technický výběr do kapsy.

## Bibliografická citace článku

ŠKORPÍK, Jiří. Machovo číslo a efekty při proudění vysokými rychlostmi, *Transformační technologie*, 2006-01, [last updated 2021-02-19]. Brno: Jiří Škorpík, [on-line] pokračující zdroj, ISSN 1804-8293. Dostupné z <https://www.transformacni-technologie.cz/39.html>.