PŘÍLOHA 101: Dynamika tekutin, Proudění plynů a par tryskami, Odvození rovnice pro rychlost plynu na výtoku z trysky

Výtokovou rychlost z trysky lze odvodit z rovnice prvního zákona termodynamiky (např. [Škorpík, 2024]) pro případ proudění ideální tekutiny nekonající vnější práci, nesdílející teplo s okolím a bez významného vlivu změny potenciální energie:

$$\mathrm{d}h+\frac{\mathrm{d}V^2}{2}=0.$$

P101/2: Změna rychlosti a entalpie mezi vstupem a libovolným průřezem trysky, např. na výtoku, získáme integrací poslední rovnice na příslušném úseku:

$$\int_{h\mathrm{i}}^{h\mathrm{e}}\mathrm{d}h=-\int_{V\mathrm{i}}^{V\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}V^2}{2}$$

$$h_\mathrm{e}-h_\mathrm{i}=\frac{V_\mathrm{i}^2}{2}-\frac{V_e^2}{2}$$

$$V_\mathrm{e}=\sqrt{2(h_\mathrm{i}-h_\mathrm{e})+V_\mathrm{i}^2}.$$

Z definičního vzorce entalpie [Škorpík, 2024] lze také psát pro rozdíl entalpií:

$$h_\mathrm{i}-h_\mathrm{e}=c_\mathrm{p}(T_\mathrm{i}-T_\mathrm{e}),$$

c_p [J·K^{-1}·kg^{-1}] tepelná kapacita 1 kg látky při stálém tlaku.

P101/3: Z Mayerova vztahu [Kalčík and Sýkora, 1979] pro vztah mezi poměrem tepelných kapacit κ a individuální plynové konstanty plynu r lze pro tepelnou kapacitu při stálém objemu psát:

$$c_\mathrm{p}=\frac{\kappa}{\kappa-1}r.$$

Takže poslední rovnici lze upravit na tvar:

$$h_\mathrm{i}-h_\mathrm{e}=c_\mathrm{p}=\frac{\kappa}{\kappa-1}r(T_\mathrm{i}-T_\mathrm{e}).$$

P101/4: Vztah mezi počáteční teplotou T_i a koncovou teplotou T_e lze popsat rovnicí izoentropy:

$$p_\mathrm{i}\cdot v_\mathrm{i}^{\kappa}=p_\mathrm{e}\cdot v_\mathrm{e}^{\kappa}.$$

Vztah mezi měrným objemem v a teplotou T lze vyjádřit ze stavové rovnice ideálního plynu:

$$p\cdot v=r\cdot T\Rightarrow v=\frac{r\cdot T}{p}.$$

Kombinací posledních dvou rovnic získáme pro teplotu T_e vztah:

$$p_i \frac{r \cdot T_i^{\kappa}}{p_i} = p_e \frac{r \cdot T_e^{\kappa}}{p_e} \Rightarrow T_e = T_i \left(\frac{p_i}{p_e} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}.$$

P101/5: Dosazením za teplotu T_e do rovnice v P101/3 a úpravou získáme pro rozdíl entalpií vztah:

$$h_i - h_e = \frac{\kappa}{\kappa - 1} r \cdot T_i \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_i} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right].$$

P101/6: Poslední rovnici dosadíme do rovnice rychlosti plynu V_e v P101/1:

$$V_e = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} r \cdot T_i \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_i} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] + V_i^2}.$$

P101/7: Při výpočtech se často vychází z celkového stavu plynu před tryskou, tzn. jako by plyn v trysce expandoval z bodu h_s podle OBRÁZKU 101 (s. 4), pak lze odvodit rovnici pro rychlost ve tvaru:

$$V_e = \sqrt{2(h_{is} - h_e)} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} r \cdot T_{is} \left(1 - \varepsilon_s^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)}.$$