

Řešení Úlohy 255

Návrh lopatkového stroje vychází především z energetických a hmotových bilancí (zákonů zachování) a silových rovnováhách. Po sestavení těchto rovnic obvykle zjistíme, že zadání, které jsme dostali je neúplné a některé veličiny v těchto rovnicích tedy musíme kvalifikovaně odhadnout na základě podobnosti s již předchozími řešenými problémy. Návrh tedy probíhá iteračně, kdy na konci výpočtu konfrontujeme výsledek s očekáváním a případně provedeme výpočet znovu s novými odhady.

Princip vodního kola: přeměna kinetické energie proudu vody na energii mechanickou ve formě kroutícího momentu na hřídeli kola. To znamená, že proud vody před kolem bude mít větší kinetickou energii (větší rychlost) než za kolem. Kinetickou energii (rychlost) proud vody získá přeměnou potenciální energii (vyšší hladina za zdymadlem) na kinetickou.

Proud vody má určitou hybnost i za lopatkou viz. obrázek. U vodních kol rychlost proudu za lopatkou je přibližně poloviční oproti rychlosti před lopatkou.

Zadané parametry úlohy jsou:

$$H=0,6 \text{ m}; \dot{V}=0,7 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}.$$

Vzorce a rovnice, které lze použít při výpočtu

Vzorce pro hmotnostní bilanci vychází ze zákona zachování hmotnosti

a průtoku:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = \dot{m} = \dot{V} \cdot \rho, \\ \rho &= 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}; \\ \dot{m} &= 700 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Vzorce a rovnice pro silovou rovnováhu se týkají především síly na ponořené lopatky od proudu vody. Síla, která působí na lopatky má v tomto případě přibližně směr kolmý na poloměr kola, a proto ji nazýváme obvodová síla. Vypočítá se z rozdílu hybnosti proudu před a za lopatkou. Z této síly lze stanovit i kroutící moment:

$$F = H_1 - H_2 = c_1 \cdot \dot{m} - c_2 \cdot \dot{m} = \dot{m}(c_1 - c_2) \quad (\text{a}).$$

Poslední sada vzorců a rovnic vychází ze zákona zachování energie. Tyto vzorce lze využít v místech kde se nějaká energie transformuje na jinou nebo práci. Tato místa jsou dvě – když se nezabýváme ztrátami – u zdymadla, kde se transformuje potenciální energie vody na kinetickou a v oblasti ponoření lopatek do vody, kde se kinetická energie transformuje na práci vodního kola:

Závislost rychlosti na otevření stavidla* je podle Toricelliova vzorce [1, s. 52], který lze odvodit z Bernoulliho rovnice:

$$c_1 = \sqrt{2 \cdot g(H-h)} \quad (\text{b}).$$

*Poznámka

Kola na spodní vodu jsou často instalovány na hladině řeky. V případě malého průtoku se voda svede k jezu kde je přes zdymadlo pouštěna na lopatky vodního kola. Hladina za stavidlem se udržuje přibližně konstantní, jestliže průtok poklesne mlynář patřičně přivře stavidlo tak, aby neklesalo vzduť. Takto

— 12. Základní rovnice lopatkových strojů —

se zvýší spád h' a tedy výtoková rychlost protože výtok pod stavidlem lze přirovnat k výtoku otvorem pod hladinou [1, s. 72], kdy platí že v celém výtokovém průřezu je konstantní rychlost proudu odpovídající spádu $H-h=h'$. proto při přivírání stavidla bude snižovat průtok, ale zvyšovat rychlost jak je výše uvedeno.

Výkon kola a výkon proudu za kolem se musí rovnat výkonu proudu před kolem. Jestliže výkon proudu před kolem bude mít označení P_1 a za kolem P_2 , pak lze psát:

$$P = P_1 - P_2 \quad (c),$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \dot{m} c_1^2; \quad P_2 = \frac{1}{2} \cdot \dot{m} c_2^2.$$

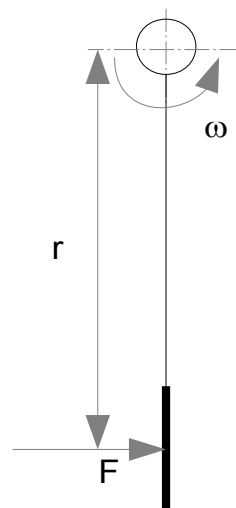
Výkon kola se vypočítá pomocí otáček a síly působící na lopatky

$$P = \omega \cdot M_k \quad (d),$$

M_k [N·m] kroutící moment na hřídeli.

Kroutící moment na hřídeli odpovídá součinu síly působící na lopatku a ramena respektive poloměru kola:

$$M_k = F \cdot r.$$



Síla působící na lopatku vodního kola vyvolává kroutící moment na hřídeli vodního kola.

$$M_k = r \cdot \dot{m} (c_1 - c_2) \quad (e).$$

Dosazením Rovnic (d), (e) do (c):

$$\omega \cdot r \cdot \dot{m} (c_1 - c_2) = \frac{1}{2} \cdot \dot{m} c_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \dot{m} c_2^2,$$

$$\omega \cdot r (c_1 - c_2) = \frac{1}{2} c_1^2 - \frac{1}{2} c_2^2.$$

Součin úhlové rychlosti a poloměru je podle vzorce [11.548] obvodová rychlost kola:

$$\omega \cdot r = u.$$

$$u (c_1 - c_2) = \frac{1}{2} (c_1 - c_2) (c_1 + c_2),$$

$$u = \frac{1}{2} (c_1 + c_2) \quad (f).$$

Uvedené vzorce a rovnice jsou základní, které lze použít při následném výpočtu velikosti a parametrů vodního kola.

Vodní kolo v tomto případě slouží k pohonu mlýna respektive mlecího kamene, který se otáčí. Mlecí kámen mívá otáčky kolem 200 ot/min. Mlecí kámen je poháněn vodním kolem přes převod pomocí palečnického kola (velké dřevěné ozubené kolo-zuby=dřevěné

— 12. Základní rovnice lopatkových strojů —

palce). Tento převod je klíčový a jeho konstrukce a velikost závisí na tom jaké jsou otáčky vodního kola. Každý sekerník byl naučen stavět palečnicková kola se stejným převodovým poměrem, protože to měl spočítané a nerad to měnil (podobně jako dnes se vyrábí určitá řada převodovek, tím je levnější jakýkoliv typ je o dva řády dražší, protože je ho třeba navrhnout a vyrobit). Přitom otáčky mlýnského kamene jsou dané. Řekněme, že jsme sekerníci, kteří umí vyrobit palečnickové kolo s převodovým poměrem odpovídající otáčkám vodního kola kolem 8 ot/min [2]:

$$n=8 \text{ min}^{-1}.$$

Vztah mezi průměrem kola, otáčkami a obvodovou rychlostí je:

$$u = \pi \cdot d \cdot n \Rightarrow d = \frac{u}{\pi \cdot n}.$$

O obvodové rychlosti pouze víme, že je střední rychlostí vody před a za kolem. Ani jednu z těchto rychlostí neznáme, ale z Toricelliho vzorce víme jak by mohla být maximální rychlost c_{1max} , kterou voda dosáhne blíž-li se zdymadlo zavřenému stavu $h' \rightarrow 0 \text{ m}$:

$$c_{1max} = \sqrt{2 \cdot g \cdot H},$$

$$c_{1max} = 3,4310 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Jestliže rychlost za kolem bude přibližně třetinová tj. $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, potom lze obvodovou rychlost očekávat na hodnotě přibližně $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Znamená to, že v této chvíli jsme nuceni obvodovou rychlost odhadnout, a po výpočtu rychlostí před kolem za kolem tento odhad případně upravit:

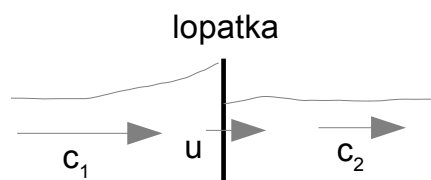
$$u \approx 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$d = 4,7746 \text{ m}.$$

Výška lopatek je dána výškou kruhových bočnic – věnců. Určoval ji sekerník podle konstrukce kola a šířku fošen. Zpravidla se pohybovala od 20 do 30 cm . řekněme, že v našem případě je výška lopatky 25 cm .

$$a = 25 \text{ cm}.$$

Šířka kola odpovídá šířce lopatky b . Šířka lopatky se vypočítá z průtoku, obvodové rychlosti kola a jeho obvodu. Protože množství vody protékající na kolo za jednotku času se muselo vejít mezi lopatky na takovém úseku obvodu kola tj. dráze, kterou vykoná za jednotku času. Předpokládejme, že vzduť před lopatkou odpovídá výšce lopatky (ve skutečnosti bude menší).



Situace vodního proudu před a za lopatkou.

Lopátka brzdí proud vody tak, že před lopatkou dojde k mírnému vzduť hladiny, rychlost proud vody bude odpovídat obvodové rychlosti pohybu lopatky u . Za lopatkou se toto vzduť opět transformuje na kinetickou energii, tak, že rychlost za lopatkou c_2 bude o něco vyšší než u .

$$\dot{V} = S \cdot u,$$

S [m^2] plocha lopatky.

$$S = a \cdot b,$$

b [m] šířka lopatky,

$$b = \frac{S}{a}.$$

$$S = \frac{\dot{V}}{u} = 0,4667 \text{ m}^2.$$

— 12. Základní rovnice lopatkových strojů —

$$b=1,4 \text{ m.}$$

Úhlová rychlost otáčení kola bude podle vzorce:

$$\omega=2\cdot\pi\cdot n=0,8378 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Pro kroutící moment podle *Vzorce (e)* potřebujeme poloměr kola a především rychlosti c_1 a c_2 :

$$r=\frac{d}{2}=2,3873 \text{ m.}$$

Pro výpočet rychlosti podle Toriceliho vzorce potřebujeme znát pootevření zdymadla:

$$\dot{V}=h\cdot b\cdot c_1.$$

Jestliže bude šířka zdymadla stejná jako kola, pak lze psát:

$$h=\frac{\dot{V}}{b\cdot c_1}.$$

Kombinací posledního vzorce se *Vzorcem (b)* získáme:

$$c_1=\sqrt{2\cdot g\left(H-\frac{\dot{V}}{b\cdot c_1}\right)},$$

$$\frac{c_1^2}{2\cdot g}=H-\frac{\dot{V}}{b\cdot c_1},$$

$$\frac{b\cdot c_1^3}{2\cdot g}-b\cdot H\cdot c_1+\dot{V}=0.$$

Řešení poslední kubické rovnice je:

$$c_{1\max}=2,8955 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Rychlost c_2 ze *Vzorce (d)*:

$$c_2=2u-c_1=1,1045 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Z výsledku vidíme, že náš původní odhad obvodové rychlosti je celkem přijatelný. Ostatní důležité parametry kola jsou:

$$M_k=2993,03 \text{ N}\cdot\text{m.}$$

$$F=\frac{M_k}{r}=1253,72 \text{ N.}$$

$$P=2507,44 \text{ W.}$$

$$h=0,1727 \text{ m.}$$

Toto jsou parametry kola pokud neuvažujeme ztráty (především obtok kolem lopatek a tření vody o kanál).

Tím, že proud vody má za kolem ještě nějakou rychlost je jasné, že jsem nevyužili celou energii proudu vody, která odpovídá kinetické energii proudu.

Odkazy

1. MAŠTOVSKÝ, Otakar. *Hydromechanika*, vydalo Statní nakladatelství technické literatury, vydání druhé, 320 stran, 1964.

2. KŘIVANOVÁ, Magda, ŠTĚPÁN, Luděk. *Dílo a život mlynářů a sekerníků v Čechách*, vydalo nakladatelství ARGO 2000, ISBN- 80-7203-254-2, 2001.